DR. SYDNEY ROSS
Rensselaer Polytechnic Institute
Troy, New York

LJS BIBLIOTHECA SCHOENBERGENSIS
207
SCHOENBERG DATABASE OF MANUSCRIPTS LJS

Theorie
der Variationsrechnung.

Vorlesung,
gehalten im Sommersemester 1879
von
Prof. Dr. C. Weierstrass.

I Hauptteil.

Theorie der Maxima und Minima.

Capitel 1. Theorie der Maxima und Minima von Functionen einer und mehrerer Veränderlichen ohne Nebenbedingungen.

Wir schicken der eigentlichen Variationsrechnung die Theorie der Maxima und Minima voraus, einmal deshalb, weil sich erstere Theorie aus der letzteren historisch entwickelt hat, sodann, weil jene zur vollständigen Durchführung ihrer Aufgaben sehr häufig die Resultate dieser voraussetzen muss.

Wir setzen im Folgenden überall da, wo nicht ausdrücklich das Gegenteil hervorgehoben wird, voraus, dass nicht nur die Grössen welche als Argumente von Functionen auftreten, sondern auch die Functionen selbst reell sein, und dass letztere, sobald man die Veränderlichen auf einen bestimmten continuirlichen Bereich beschränkt, innerhalb dieses Bereiches überall den Character von eindeutigen regulären Functionen besitzen sollen.

Wir sagen dann von einer Function $f(x)$ einer Veränderlichen, sie besitze an einer bestimmten Stelle $x = a$ ein Maximum oder Minimum, wenn der Wert der Function für $x = a$ bezüglich grösser oder kleiner ist, als

für alle andern in einer noch so kleinen Umgebung $(x-a) < \delta$ gelegenen Werte von x. Es drückt sich also analytisch die Bedingung dafür, dass $f(x)$ an der Stelle $x = a$

ein Maximum besitze, durch die Ungleichung aus:

$$f(x) - f(a) < 0, \quad |x-a| < \delta,$$

ein Minimum besitze, durch die Ungleichung aus:

$$f(x) - f(a) > 0, \quad |x-a| > \delta.$$

Ebenso sagen wir von einer Function $f(x_1, \dots x_n)$ von n Veränderlichen, sie besitze an einer bestimmten Stelle $x_1 = a_1, \dots x_n = a_n$ ein Maximum oder Minimum, wenn der Wert der Function für $x_1 = a_1, \dots x_n = a_n$ bezüglich grösser oder kleiner ist, als für alle andern in einer noch so kleinen Umgebung dieser Stelle $|x_\lambda - a_\lambda| < \delta_\lambda \ (\lambda = 1, 2, \dots n)$ gelegenen Wertsysteme $x_1, x_2, \dots x_n$. Die analytische Bedingung also dafür, dass die Function $f(x_1, \dots x_n)$ an der Stelle $x_1 = a_1, \dots x_n = a_n$

ein Maximum besitze, ist $f(x_1, \dots x_n) - f(a_1, \dots a_n) < 0$

ein Minimum besitze, ist $f(x_1, \dots x_n) - f(a_1, \dots a_n) > 0$

$$\left\{ |x_\lambda - a_\lambda| < \delta_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \dots n) \right.$$

Die Aufgabe, um welche es sich in der Theorie der Maxima und Minima handelt, ist nun die, diejenigen Stellen aufzusuchen, für welche ein Maximum oder Minimum der Function wirklich eintritt. Da diese Aufgabe für Functionen einer Veränderlichen bereits in den

Elementen der Differentialrechnung erschöpfend gelöst wird, so sei hier nur kurz auf diesen Fall hingedeutet.

Sind x_1 und x_2 zwei im Bereiche der Veränderlichen und hinreichend bei einander gelegene Werte von x, so lässt sich die Differenz der zugehörigen Functionswerte darstellen in der Form:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\, f'(x_1 + \varepsilon(x_2 - x_1)),$$

worin ε eine zwischen 0 und $+1$ gelegene Grösse repräsentirt, oder auch, wenn $x_1 = x$ und $x_2 = x + h$ gesetzt wird:

$$1.)\quad f(x+h) - f(x) = h\, f'(x + \varepsilon h).$$

Aus diesem Theorema entspringt der Taylor'sche Lehrsatz in der Form:

$$2,\quad f(x+h) - f(x) = h\, f'(x) + \frac{1}{2!} h f''(x) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} h^{n-1} f^{(n-1)}(x) + \frac{1}{n!} h^n f^{(n)}(x + \varepsilon h)$$

Setzt man in den letzten beiden Formeln a statt x und x statt x und h, so gehen dieselben über in:

$$1^a)\quad f(x) - f(a) = (x-a)\, f'(a + \varepsilon(x-a))$$

$$2^a)\quad f(x) - f(a) = \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a + \varepsilon(x-a)).$$

Da $f(x)$ eine reguläre und somit stetige Function ist, so gilt dasselbe von ihren sämmtlichen Ableitungen. Ist daher $f'(a)$ von 0 verschieden, so wird auch bei kleinen Werten von $h = x - a$ der Wert von $f'(a + \varepsilon h)$ von 0 verschieden sein und gleichen Zeichens mit $f'(a)$. Je nach der Wahl von h, welche ja beliebig ist, wird daher sowohl wenn $f'(a)$

positiv als auch, wenn es negativ ist, die Differenz $f(x) - f(a)$ sowohl positiv als negativ gemacht werden können. Mithin kann die Function $f(x)$ an der Stelle $x = a$ weder ein Maximum noch ein Minimum besitzen, sobald $f'(a)$ von 0 verschieden ist. Daher erhalten wir den Satz:

Maxima oder Minima der Function $f(x)$ können nur eintreten für diejenigen Werte von x, für welche die erste Ableitung $f'(x)$ verschwindet.

Es kann geschehen, dass für die Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$ auch noch einige der folgenden Ableitungen verschwinden. Ist die erste für die Wurzel $x = a$ nicht verschwindende Ableitung die n^{te}, so besteht nach Gl. 2^a) die Formel:

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a + \varepsilon(x-a)),$$

und es wird wegen der Stetigkeit von $f^{(n)}(a)$ bei kleinen Werten von $h = x - a$ $f^{(n)}(a + \varepsilon h)$ ebenfalls von 0 verschieden und gleichen Zeichens mit $f^{(n)}(a)$ sein. Ist daher n eine ungerade Zahl, so wird man, je nachdem man h positiv oder negativ annimmt, auch bewirken können, das die Differenz $f(x) - f(a)$ bei jedem Werte von $f^{(n)}(a)$ das eine oder das andere Vorzeichen erhält, und es wird somit die Function $f(x)$ and der Stelle $x = a$ weder ein Maximum noch ein Minimum besitzen. –

Ist dagegen n eine gerade Zahl, so wird h^n, wie man auch h wählen möge, beständig positiv sein; folglich ist die Differenz $f(x) - f(a)$ in diesem Falle positiv oder negativ, je nachdem $f^{(n)}(a)$ positiv oder negativ ist. Im erstern Falle findet an der Stelle $x = a$ ein Minimum, im letztern ein Maximum der Function $f(x)$ statt. Dis zusammenfassend erhält man für Functionen einer Veränderlichen folgendes Resultat:

> Maxima und Minima der Function $f(x)$ können nur eintreten für die Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$. Ist a eine solche, so findet an der Stelle $x = a$ weder ein Maximum, noch ein Minimum statt, wenn die erste für diesen Wert nicht verschwindende Ableitung von ungerader Ordnung ist. Ist dieselbe aber von gerader Ordnung, so besitzt die Function an der Stelle $x = a$ ein Maximum, wenn jene Ableitung negativ, ein Minimum, wenn sie positiv ist.

Um das Analoge für Functionen mehrerer Veränderlichen abzuleiten, gehen wir wieder von der für solche bestehenden Taylor'schen Entwickelung aus. Dieselbe erhalten wir, wenn wir in $f(x_1, .. x_n)$ zunächst x_λ gleich $a_\lambda + u\,(x_\lambda - a_\lambda)$ setzen, als-

dann auf die Function:

$$\varphi(u) = f(a_1 + u(x_1 - a_1) \ldots, a_n + u(x_n - a_n))$$

die Mac-Laurin'sche Entwicklung für Functionen einer Veränderlichen, nämlich:

$$3)\quad \varphi(u) = \varphi(0) + \frac{u}{1}\varphi'(0) + \frac{u^2}{2!}\varphi''(0) + \ldots + \frac{u^{m-1}}{(m-1)!}\varphi^{(m-1)}(0) + \frac{u^m}{m!}\varphi^{(m)}(\varepsilon u)$$

anwenden und hierin $u = 1$ setzen. Bezeichnet man mit f_k die erste Ableitung ~~nach~~ von f nach $a_k + u(x_k - a_k)$, mit f_{k_1, k_2} die Ableitung von f nach $a_{k_1} + u(x_{k_1} - a_{k_1})$ und nach $a_{k_2} + u(x_{k_2} - a_{k_2})$ etc so erhält man:

$$\varphi'(u) = \sum_k f_k(a_1 + u(x_1 - a_1), \ldots, a_n + u(x_n - a_n))(x_k - a_k)$$

$$\varphi''(u) = \sum_{k_1, k_2} f_{k_1, k_2}(a_1 + u(x_1 - a_1), \ldots, a_n + u(x_n - a_n))(x_{k_1} - a_{k_1})(x_{k_2} - a_{k_2})$$

$$\varphi^{(m-1)}(u) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}} f_{k_1 \ldots k_{m-1}}(a_1 + u(x_1 - a_1), \ldots a_n + u(x_n - a_n))(x_{k_1} - a_{k_1})(x_{k_2} - a_{k_2}) \ldots (x_{k_{m-1}} - a_{k_{m-1}})$$

$$\varphi^{(m)}(\varepsilon u) = \sum_{k_1 \ldots k_m} f_{k_1 \ldots k_m}(a_1 + \varepsilon u(x_1 - a_1) \ldots a_n + \varepsilon u(x_n - a_n))(x_{k_1} - a_{k_1}) \ldots (x_{k_m} - a_{k_m})$$

Folglich wird aus 3):

$$\varphi(u) - f(a_1, \ldots a_n) = \frac{u}{1} \cdot \sum_k f_k(a_1, \ldots a_n)(x_k - a_k)$$
$$+ \frac{u^2}{2!} \sum_{k_1, k_2} f_{k_1, k_2}(a_1, \ldots a_n)(x_{k_1} - a_{k_1})(x_{k_2} - a_{k_2})$$
$$+ \;- - - - - - - - - - - - - - - - -$$
$$+ \frac{u^{m-1}}{(m-1)!} \sum_{k_1, \ldots k_{m-1}} f_{k_1, \ldots k_{m-1}}(a_1, \ldots a_n)(x_{k_1} - a_{k_1}) \ldots (x_{k_{m-1}} - a_{k_{m-1}})$$
$$+ \frac{u^m}{m!} \sum_{k_1 \ldots k_m} f_{k_1 \ldots k_m}(a_1 + \varepsilon u(x_1 - a_1), \ldots a_n + \varepsilon u(x_n - a_n))(x_{k_1} - a_{k_1}) \ldots (x_{k_m} - a_{k_m})$$

Hieraus nun entsteht, wenn man $u = 1$ setzt:

$$f(x_1, \ldots x_n) - f(a_1, \ldots a_n) = \sum_k f_k(a_1, \ldots a_n)(x_k - a_k) + \frac{1}{2!} \sum_{k_1, k_2} f_{k_1, k_2}(a_1, \ldots a_n)(x_{k_1} - a_{k_1})(x_{k_2} - a_{k_2})$$
$$+ \;- - - - - - - - - - - - - - - - - - -$$
$$+ \frac{1}{(m-1)!} \sum_{k_1, \ldots k_{m-1}} f_{k_1, \ldots k_{m-1}}(a_1, \ldots a_n)(x_{k_1} - a_{k_1}) \ldots (x_{k_{m-1}} - a_{k_{m-1}})$$
$$+ \frac{1}{m!} \sum_{k_1, \ldots k_m} f_{k_1, \ldots k_m}(a_1 + \varepsilon(x_1 - a_1), \ldots a_n + \varepsilon(x_n - a_n))(x_{k_1} - a_{k_1}) \ldots (x_{k_m} - a_{k_m})$$

Diese Form der Taylor'schen Entwicklung ist nicht die übliche, um letztere zu erhalten, beachte man, das bei der Ausführung der Summationen jeder einzelne der Indices $\kappa_1, \kappa_2, ..$ unabhängig von den andern alle Werte von 1 bis n durchläuft, so dass also das λ^{te} Glied jener Entwicklung eine homogene Function λ^{ten} Grades von $x_1 - a_1, ..., x_n - a_n$ ist. Schreiben wir das allgemeine Glied jener homogenen Function λ^{ten} Grades in der Form:

$$\frac{1}{\lambda!}\, D\, N\, (x_1 - a_1)^{\lambda_1} (x_2 - a_2)^{\lambda_2} \cdots (x_n - a_n)^{\lambda_n},$$

worin $\lambda_1 + \lambda_2 + .. + \lambda_n = \lambda$, D ein bestimmter Differentialquotient, N ein gewisser Zahlenfactor ist, so sind die Werte von D und N noch zu bestimmen.

Zunächst ist:

$$D = \left(\frac{\partial^\lambda f(x_1, x_2, .. x_n)}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2} \cdots \partial x_n^{\lambda_n}}\right)_{a_1, a_2 .. a_n} = f^{(\lambda_1, \lambda_2, .. \lambda_n)}(a_1, a_2, .. a_n).$$

Ferner ist die Zahl N offenbar gleich der Anzahl der Permutationen von λ Elementen, unter denen sich λ_1 gleiche $x_1 - a_1$, λ_2 gleiche $x_2 - a_2$, .. λ_n gleiche $x_n - a_n$ vorfinden, d. i. also:

$$N = \frac{\lambda!}{\lambda_1! \lambda_2! \ldots \lambda_n!}$$

Folglich erhalten wir schliesslich, wenn wir noch $x_\kappa - a_\kappa = h_\kappa$ setzen:

$$4)\quad f(x_1, x_2, .. x_n) - f(a_1, .. a_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_k}\right)_{a_1, a_2, .. a_n} h_k$$

$$+\frac{1}{2}\sum\left(\frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\ldots x_n)}{\partial x_\lambda\,.\,\partial x_\mu}\right)_{a_1,a_2,\ldots a_n} h_\lambda h_\mu$$

$$+ \;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-$$

$$+\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n}^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=m-1} f^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n)}(a_1,a_2\ldots a_n)\,\frac{h_1^{\lambda_1}h_2^{\lambda_2}\ldots h_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!}$$

$$+\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n}^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=m} f^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n)}(a_1+\varepsilon h_1,\ldots a_n+\varepsilon h_n)\,\frac{h_1^{\lambda_1}h_2^{\lambda_2}\ldots h_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!}$$

Dies ist die Taylor'sche Entwicklung für Functionen mehrerer Veränderlichen in ihrer gewöhnlichen Form; insbesondere ist dieselbe für $m = 1$:

5) $f(x_1,x_2,\ldots x_n) - f(a_1,a_2,\ldots a_n) = \sum_{\kappa=1}^{n} f^{(\kappa)}(a_1+\varepsilon h_1,\ldots a_n+\varepsilon h_n)\,h_\kappa$.

Da nun $f(x_1,x_2\ldots x_n)$ eine reguläre und somit stetige Form ist, so gilt dasselbe von ihren sämmtlichen Ableitungen. Sind daher die ersten Ableitungen von $f(x_1,\ldots x_n)$ sämmtlich oder auch nur zum Teil von 0 verschieden für $x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$, so werden dieselben auch noch bei hinreichend kleinen Werten der $h_1,\ldots h_n$ für $x_1 = a_1+\varepsilon h_1$, $x_2 = a_2+\varepsilon h_2$, $\ldots x_n = a_n+\varepsilon h_n$ verschieden von 0 und von demselben Zeichen wie für $a_1, a_2, \ldots a_n$ sein. Wählt man also z. B. alle h mit Ausnahme eines einzigen, das beliebig positiv oder negativ sein kann, gleich 0, so sieht man, dass man sowohl bei positivem als bei negativem Werte der betreffenden Ableitung bewirken kann, dass die Differenz

$$f(x_1,x_2,\ldots x_n) - f(a_1,a_2,\ldots a_n)$$

beliebig positiv oder negativ wird, dass mithin

an der Stelle $a_1, a_2, \ldots a_n$ weder ein Maximum noch ein Minimum der Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ stattfindet. Daher ergiebt sich der Satz:

Maxima und Minima der Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ können nur eintreten für diejenigen Wertsysteme von $x_1, x_2 \ldots x_n$, welche die n Gleichungen:

$$6)\ \frac{df}{dx_1} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

zugleich erfüllen.

Es kann eintreten, dass für die gemeinsamen Wurzelsysteme der Gleichungen 6.) auch noch höhere Ableitungen verschwinden. In diesem Falle lässt sich allgemein nur noch sagen, dass wenn für ein Wurzelsystem der Gleichungen 6) sämmtliche Ableitungen mehrere der nächst höheren Ordnungen verschwinden, und wenn die erstere für dasselbe nicht verschwindende Ableitung von ungerader Ordnung ist, die Function aus demselben Grunde wie vorher an der betreffenden Stelle sicher kein Maximum oder Minimum besitzt. – Ist dagegen diese Ableitung von gerader Ordnung, so lässt sich bei dem gegenwärtigen Stande der Theorie der Formen n^{ten} Grades von mehreren Veränderlichen kein allgemeines Urteil über das Verhalten der Function an der betreffenden Stelle fällen.

Wir beschränken uns daher auf den Fall, wo die Ableitungen zweiter Ordnung der Function $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$

für das reelle Wurzelsystem $a_1, a_2, .. a_n$ der Gleichungen 6) nicht sämmtlich verschwinden. Dann kommt es wegen der Formel:

$$7)\quad f(x_1, x_2 .. x_n) - f(a_1, a_2 .. a_n) = \frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu}\left(\frac{\partial^2 f(x_1, x_2 .. x_n)}{\partial x_\lambda\, \partial x_\mu}\right)_{a_1+\varepsilon h_1, .. a_n+\varepsilon h_n} h_\lambda\, h_\mu$$

bei der Entscheidung, ob nun $f(x_1, x_2, .. x_n)$ an der Stelle $a_1, a_2, .. a_n$ ein Maximum oder Minimum wirklich besitzt, darauf an, ein Criterium dafür zu finden, wann die ganze homogene Function zweiten Grades:

$$\sum_{\lambda,\mu}\left(\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, .. x_n)}{\partial x_\lambda \cdot \partial x_\mu}\right)_{a_1+\varepsilon h_1, .. a_n+\varepsilon h_n} h_\lambda\, h_\mu$$

der n Veränderlichen $h_1, h_2, .. h_n$ bei beliebigen Werten der letzteren beständig positiv oder negativ ist. Da aber bei hinreichend kleinen Werten der $h_1, .. h_n$ wegen der vorausgesetzten Stetigkeit die Grössen:

$$\left(\frac{\partial^2 f(x_1, .. x_n)}{\partial x_\lambda \cdot \partial x_\mu}\right)_{a_1+\varepsilon h_1, .. a_n+\varepsilon h_n} \text{ und } \left(\frac{\partial^2 f(x_1, x_2 .. x_n)}{\partial x_\lambda \cdot \partial x_\mu}\right)_{a_1, .. a_n}$$

unendlich wenig von einander verschieden und gleichen Zeichens sind, so werden auch bei kleinen Werten der h die Functionen:

$$\sum_{\lambda,\mu}\left(\frac{\partial^2 f(x_1, .. x_n)}{\partial x_\lambda \cdot \partial x_\mu}\right)_{a_1+\varepsilon h_1, .. a_n+\varepsilon h_n} h_\lambda \cdot h_\mu \text{ und } \sum_{\lambda,\mu}\left(\frac{\partial^2 f(x_1, .. x_n)}{\partial x_\lambda \cdot \partial x_\mu}\right)_{a_1, .. a_n} h_\lambda \cdot h_\mu$$

stets dasselbe Vorzeichen besitzen und wir können uns somit auf die Untersuchung der letzteren Function beschränken.

Es giebt nun zwei Arten von quadratischen Formen, nämlich formae definitae, welche bei reellen Werten der Veränderlichen stets einerlei Zeichen haben und nur verschwinden, wenn die Veränderlichen selbst alle verschwinden, und formae indefinitae, welche bei reellen Werten der Veränderlichen sowohl positiv als negativ werden können und zwar für Werte der Veränderlichen, deren absoluter Betrag eine beliebig kleine Grösse nicht übersteigt. – Gehört unsere homogene Function zur letzteren Art von quadratischen Formen, so ergiebt sich sehr einfach, dass die Function $f(x_1, .. x_2, .. x_n)$ an der Stelle $a_1, a_2 .. a_n$ weder ein Maximum noch ein Minimum besitzt. Wäre nämlich etwa die rechte Seite in 7.) für ein bestimmtes Wertsystem der h positiv, so könnte man nach der Definition der indefiniten quadratischen Form in unmittelbarer Nähe des ersteren ein zweites Wertsystem der h finden, für welches jene rechte Seite der Gleichung 7) und somit die Differenz $f(x_1, .. x_n) - f(a_1, .. a_n)$ negativ wäre, so dass also an der Stelle $a_1, .. a_n$ kein Maximum oder Minimum stattfinden kann.

Es ergiebt sich somit neben den Gleichungen 6. als weitere Bedingung für das Eintreten eines Maximums oder Minimums der Function $f(x_1, .. x_n)$ dass, falls die zweiten Ableitungen

der Function an der Stelle $a_1 \ldots a_n$ nicht sämmtlich verschwinden, das Aggregat der Glieder zweiter Dimension in 4.) eine definite quadratische Form sein muss.

Es erhebt sich daher jetzt die Frage: Unter welchen Bedingungen ist allgemein eine homogene quadratische Form:

$$8) \quad \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n) = \sum_{\lambda,\mu} A_{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu \qquad A_{\lambda\mu} = A_{\mu\lambda}.$$

eine definite?

Ehe wir diese Frage zu beantworten suchen, müssen wir noch auf einige Eigenschaften der homogenen Functionen zweiten Grades hin. – Denkt man sich ein $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ an Stelle von $x_1, x_2 \ldots x_n$ homogene lineare Functionen derselben:

$$9.) \quad y_\lambda = \sum_{\mu=1} c_{\lambda\mu} x_\mu \qquad (\lambda = 1, \ldots n)$$

eingeführt, welche der Bedingung unterworfen sein sollen, dass die x umgekehrt durch die y ausdrückbar, also die Determinante

$$10.) \sum \pm c_{11} c_{22} \ldots c_{nn} \gtrless 0$$

ist, so möge dadurch $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ übergehen in:

$$11) \quad \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = \psi(y_1, y_2, \ldots y_n).$$

Bei dieser Substitution kann es eintreten, dass

$\psi(y_1, y_2, \dots y_n)$ eine der Veränderlichen y nicht enthält, so dass sich also $\varphi(x_1, \dots x_n)$ darstellen liesse als eine Function von weniger als n Veränderlichen. Setzt man, um die Bedingungen hierfür aufzustellen:

$$12) \quad \varphi_\lambda = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_\lambda} = \sum_{\mu=1}^{n} A_{\lambda\mu} x_\mu \quad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

so wird man aus den n Gleichungen:

$$13) \quad 2\varphi_\lambda = \sum_\mu \frac{\partial \psi}{\partial y_\mu}\frac{\partial y_\mu}{\partial x_\lambda} = \sum_\mu c_{\mu\lambda}\frac{\partial \psi}{\partial y_\mu} \quad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

falls ψ etwa von y_n unabhängig, also $\frac{\partial \psi}{\partial y_n} = 0$ ist, die $n-1$ Unbekannten $\frac{\partial \psi}{\partial y_1}, \dots \frac{\partial \psi}{\partial y_{n-1}}$ eliminiren können, so dass man zwischen den φ_λ eine Gleichung erhält von der Form:

$$14) \quad \sum_{m=1}^{n} k_m \varphi_m = 0,$$

worin die k Constanten sind. Dies bedeutet aber nach den Gleichungen 12) nichts anderes, als dass die Determinante der gegebenen quadratischen Form verschwindet, also die Gleichung besteht:

$$15) \quad \sum \pm A_{11} A_{22} \dots A_{nn} = 0.$$

Umgekehrt ergiebt sich leicht, dass, falls die Gleichung 15) besteht, es wirklich möglich ist, die Function $\varphi(x_1, x_2 \dots x_n)$ als Function von $n-1$ Veränderlichen darzustellen. Es ist nämlich allgemein:

$$\sum_\lambda \varphi_\lambda(x_1, x_2 \ldots x_n)\, x'_\lambda = \sum_{\lambda,\mu} A_{\lambda\mu}\, x_\mu\, x'_\lambda$$

$$16)\ \sum_\lambda \varphi_\lambda(x'_1, x'_2, \ldots x'_n) = \sum_{\lambda,\mu} A_{\lambda\mu}\, x'_\mu\, x_\lambda,$$

folglich:

$$17)\ \sum_\lambda \varphi_\lambda(x_1, x_2, \ldots x_n)\, x'_\lambda = \sum_\lambda \varphi_\lambda(x'_1, x'_2 \ldots x'_n)\, x_\lambda$$

Ferner gilt die Gleichung:

$$18)\ \sum_\lambda \varphi_\lambda(x_1, x_2, \ldots x_n)\, x_\lambda = \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

Nimmt man nun an, dass die Gleichung 15, oder was auf dasselbe hinauskommt, eine identische Relation von der Form 14. besteht, setzt dann in $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ an Stelle von x_λ $x_\lambda + t k_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots n)$ und entwickelt nach Potenzen von t, wie folgt:

$$\varphi(x_1 + t k_1, \ldots x_n + t k_n) = \varphi(x_1, \ldots x_n) + 2t \sum k_\lambda \varphi_\lambda(x_1, \ldots x_n) + t^2 \varphi(k_1, \ldots k_n)$$

so ergiebt sich hieraus mit Rücksicht auf die Gleichungen 14, und 18), da die Gleichung 14) für jedes Wertsystem der $x_1, \ldots x_n$ gilt:

$$\varphi(x_1 + t k_1, \ldots x_n + t k_n) = \varphi(x_1, \ldots x_n)$$

Besteht also die Gleichung 15) oder genügen die n für jedes Wertsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$ der Gleichung 14), so ändert sich die Function nicht, wenn man darin x_λ durch $x_\lambda + t k_\lambda$ ersetzt, wo t eine willkürliche Grösse ist. Bestimmt man daher die letztere so, dass, vorausgesetzt,

dass $\kappa_\nu \gtrless 0$ ist, das Argument $x_\nu + t\,\kappa_\nu = 0$ ist, so ist:

$$19)\ \varphi(x_1, x_2 \dots x_n) = \varphi\left(x_1 - \frac{\kappa_1}{\kappa_\nu} x_\nu, \dots x_{\nu-1} - \frac{\kappa_{\nu-1}}{\kappa_\nu} x_\nu, 0, x_{\nu+1} - \frac{\kappa_{\nu+1}}{\kappa_\nu} x_\nu, \dots x_n - \frac{\kappa_n}{\kappa_\nu} x_\nu\right),$$

womit φ als Function von weniger als n Veränderlichen dargestellt ist. Also:

> Das Verschwinden der Determinante $\Sigma \pm A_{11} A_{22} \dots A_{nn}$ bildet die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass sich eine homogene quadratische Function $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma A_{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu$ darstellen lasse als Function von $n-1$ Veränderlichen.

Nunmehr gehen wir zur Lösung der gestellten Aufgabe über und nehmen dabei an, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, dass es sich darum handle, die Bedingungen festzustellen, unter denen die Function $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$ beständig positiv ist. Der zweite Fall, wo $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$ beständig negativ ist, erledigt sich damit von selbst, da man dann nur $-\varphi$ an die Stelle von φ zu setzen braucht.

Wir zeigen zunächst, dass sich jede homogene Function zweiten Grades $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$ darstellen lässt als ein Aggregat von Quadraten linearer Functionen der Veränderlichen. Wir setzen dabei voraus, dass sich $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$ nicht

darstellen lasse als Function von n-1 Veränderlichen, dass also:

$$20)\quad |\sum \pm A_{11} A_{22} \cdot\cdot A_{nn}| \gtrless 0 \text{ sei,}$$

oder dass sich in keiner Weise Constanten $\varkappa$ so bestimmen lassen, dass die Gleichung $\sum_{i=1}^{n} \varkappa_i \varphi_i = 0$ identisch stattfindet.

Versteht man dann unter y eine lineare Function der x von der Form:

$$21)\quad y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots c_n x_n$$

und unter g eine gewisse Constante, so wird der Ausdruck $\varphi - g y^2$ nach dem eben Bewiesenen dargestellt werden können als Function von nur n-1 Veränderlichen, wenn man Constanten $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n$ so bestimmen kann, dass:

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \varkappa_\lambda (\varphi_\lambda - g y c_\lambda) = 0$$

oder:

$$22)\quad \sum_{\lambda=1}^{n} \varkappa_\lambda \varphi_\lambda - g y \sum_{\lambda=1}^{n} \varkappa_\lambda c_\lambda = 0$$

ist. Aus der gemachten Voraussetzung 20, folgt hieraus einerseits, dass auch

$$23)\quad \sum_\lambda \varkappa_\lambda c_\lambda \gtrless 0$$

sein muss, andererseits, dass sich mittelst der n linearen Gleichungen:

$$24)\quad \sum_\mu A_{\lambda\mu} x_\mu = \varphi_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

die Grössen $x_1, x_2, .. x_n$ ausdrücken lassen als lineare Functionen von $\varrho_1, \varrho_2, .. \varrho_n$ und dass somit y durch Substitution der sich so ergebenden Werte von $x_1, x_2, .. x_n$ die Form annimmt:

$$25)\quad y = \sum_{\nu=1}^{n} e_\nu \varrho_\nu ,$$

worin die e_ν Constanten sind, die sich aus den Constanten $A_{\lambda\mu}$ und c_λ zusammensetzen. Aus der Gleichung 22) folgt aber:

$$y = \frac{\sum \kappa_\lambda \varrho_\lambda}{g \sum \kappa_\lambda c_\lambda}$$

Eine derartige Darstellung von y durch die ϱ_λ kann jedoch, da man es nur mit linearen Gleichungen zu thun hat, nur auf eine Weise möglich sein; mithin ergiebt sich:

$$\kappa_\lambda = g\, e_\lambda \sum_{\mu=1}^{n} \kappa_\mu c_\mu \quad (\lambda = 1, 2, .. n)$$

Durch Substitution dieser Werte in 22) erhalten wir:

$$\sum_{\lambda=1}^{n} e_\lambda \varrho_\lambda - g\, y \sum_{\lambda=1}^{n} e_\lambda c_\lambda = 0,$$

woraus mit Rücksicht auf Gleichung 25) folgt:

$$26)\quad g = \frac{1}{\sum_{\lambda=1}^{n} e_\lambda c_\lambda}$$

Dieser Wert von g kann noch anders geschrieben werden; es ist nämlich nach 25) und 17)

$$y = \sum_{\nu=1}^{n} e_\nu \psi_\nu (x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \psi_\nu (e_1, e_2, \ldots e_n)$$

Vergleicht man dieses mit Gleichung 21, so wird:

$$27) \quad c_\nu = \psi_\nu (e_1, e_2, \ldots e_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

und daher ist:

$$g = \frac{1}{\sum_\lambda e_\lambda \varphi_\lambda (e_1, e_2, \ldots e_n)}$$

oder wegen 18):

$$28) \quad g = \frac{1}{\varphi (e_1, e_2, \ldots e_n)}$$

Da die Grössen $c_1, \ldots c_n$ bis auf die einzige Beschränkung, welche in der Ungleichung 23) ausgedrückt ist, durchaus willkürlich sind, so sind auch in Folge der Gleichungen 27) die Grössen $e_1, e_2, \ldots e_n$ vollkommen willkürlich bis auf die eine Bedingung, welche sich aus der Gleichung 28) ergiebt, dass nämlich die Function φ für das Wertsystem $e_1, e_2, \ldots e_n$ nicht verschwinden darf, da ja sonst $g = \infty$ werden würde.

Umgekehrt kann man zeigen, dass, wenn man die Grössen $e_1, e_2, \ldots e_n$ beliebig, aber mit der eben angegebenen Einschränkung wählt, und dann g aus 28) bestimmt, alsdann der Ausdruck $\varphi - gy^2$, worin y die Form 21) hat und die c sich aus den Gleichungen 27) berechnen, sich darstellen lässt als Function von nur $n-1$ Veränderlichen. Bildet man nämlich die Ableitungen dieses Ausdrucks nach den verschiedenen Veränderlichen

und multipliciert dann der Reihe nach dieselben mit den Coefficienten $c_1, c_2, .. c_n$, so erhält man durch Addition der Producte:

$$\sum c_\lambda \varphi_\lambda - g y \sum c_\lambda c_\lambda = \sum c_\lambda \varphi_\lambda - y$$

wegen des Wertes 26) von g; d. i. nach 17)

$$= \sum \varphi_\lambda (c_1, c_2, .. c_n)\, x_\lambda - y = \sum c_\lambda x_\lambda - y$$

Letzterer Ausdruck ist aber nach 21) identisch gleich 0. Da man sonach n Constanten derart hat wählen können, dass die Summe der Producte aus je einer dieser Constanten in eine Ableitung des gegebenen Ausdrucks $\varphi - g y^2$ identisch gleich 0 wurde, so folgt aus dem pag. 17 aufgestellten Satze, dass dieser Ausdruck sich darstellen lässt als Function von nur $n-1$ Veränderlichen.

Bezeichnet man

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) - g y^2 \text{ mit } \bar{\varphi}(x_1, x_2, .. x_n),$$

so findet man nach Gleichung 19) diese Function von $n-1$ Veränderlichen, wenn man in $\bar{\varphi}$ für x_λ $x_\lambda + t c_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, .. n)$ und darauf eines dieser Argumente gleich 0 setzt, also:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) - g y^2 = \bar{\varphi}\left(x_1 - \frac{c_1}{c_k} x_k, .. x_{k-1} - \frac{c_{k-1}}{c_k} x_k, 0, x_{k+1} - \frac{c_{k+1}}{c_k} x_k, .. x_n - \frac{c_n}{c_k} x_k\right)$$

Wendet man nun auf diese Function $\bar{\varphi}(x_1', x_2', .. x_{n-1}')$ dasselbe Verfahren an, wie vorher auf die Function $\varphi(x_1, x_2, .. x_n)$ u.s.f., so kommt man schliesslich

auf eine Function einer einzigen Veränderlichen, welche als homogene Function zweiten Grades von selbst ein Quadrat ist, und man hat somit die gegebene homogene Function zweiten Grades $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ dargestellt als eine Summe von Quadraten linearer homogener Functionen der Veränderlichen. Sind die Coefficienten von φ reell, ebenso die Grössen c, so sind auch die Coefficienten g reell; da nun die Grössen c bis auf eine einzige Einschränkung willkürlich angenommen werden dürfen, so ist eine solche reelle Transformation immer noch auf unendlich viele Arten ausführbar.

Soll nun:

$$2\mathfrak{g}\,\Delta\,\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = g_1 y_1^2 + g_2 y_2^2 + \ldots + g_n y_n^2$$

für reelle Werte der Veränderlichen beständig positiv und nur dann gleich 0 sein, wenn die Veränderlichen selbst alle verschwinden, so müssen sämmtliche Grössen $g_1, \ldots g_n$ positiv sein. Denn wären dies nicht der Fall und etwa g_1 negativ, so könnte man, da die y von einander unabhängige lineare homogene Functionen der x sind, die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ so wählen, dass alle y bis auf y_1 verschwinden, und es würde somit gegen unsere Annahme $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ negativ sein. Ferner darf aber auch keine der Grössen g verschwinden, denn wäre dies der Fall und etwa $g_1 = 0$, so könnte man

ebenso wie vorher Wertsysteme $x_1, x_2, .. x_n$ so wählen, dass alle y bis auf y_1 verschwinden, und es würde somit gegen unsere Annahme $\varphi(x_1, x_2 .. x_n)$ gleich Null werden können, ohne dass sämmtliche Veränderliche $x_1, x_2, .. x_n$ verschwinden. –

Umgekehrt ist unmittelbar einleuchtend, dass die Bedingung, dass $g_1, .. g_n$ sämmtlich grösser als 0 sind, auch hinreichend dafür ist, dass $\varphi(x_1, x_2 .. x_n)$ bei reellen Werten der Veränderlichen beständig positiv und nur dann gleich 0 ist, wenn die Veränderlichen sämmtlich verschwinden.

Um nun eine bestimmte, möglichst einfache Darstellung von $\varphi(x_1, x_2 .. x_n)$ als Summe von Quadraten zu erhalten, bringen wir den Ausdruck 26) für g noch auf eine dritte Form. Aus 27) folgt nämlich in Verbindung mit Gleichung 12):

$$c_\nu = \sum_\lambda A_{\nu\lambda} e_\lambda \quad (\nu = 1, 2, .. n)$$

Bezeichnet man daher die Determinante dieser Gleichungen, welche nach 20) von Null verschieden ist, mit A, also:

$$30)\quad A = \sum \pm A_{11} A_{22} \dots A_{nn},$$

so erhält man als Auflösung der vorhergehenden Gleichungen

$$c_\mu = \frac{1}{A} \sum_\lambda \frac{\partial A}{\partial A_{\lambda\mu}} c_\lambda \quad (\mu = 1, 2 .. n)$$

und hieraus mit Hilfe von 26):

$$31.) \quad g = \frac{A}{\sum\limits_{\lambda,\mu} \frac{\partial A}{\partial A_{\lambda\mu}} c_\lambda c_\mu}$$

Hierin sind die c nur der einen Bedingung unterworfen, dass $\sum\limits_{\lambda\mu} \frac{\partial A}{\partial A_{\lambda\mu}} c_\lambda c_\mu \gtrless 0$ sein muss.

Dies vorausgeschickt zeigen wir, dass man von $\varphi(x_1, x_2, .. x_n)$ zunächst das Quadrat einer einzigen Veränderlichen derart absondern kann, dass die sich ergebende Function nur noch $n-1$ Veränderliche enthält. – Damit nämlich ~~der~~ z. B. der Ausdruck $\varphi - g\, x_n^2$ eine Function von nur $n-1$ Veränderlichen darstellte, hat man nur für g den Wert 31) zu wählen, nachdem man darin $c_\lambda = 0$ $(\lambda = 1, 2, .. n-1)$, dagegen $c_n = 1$ gesetzt hat; dies giebt für g den Wert:

$$g = \frac{A}{\frac{\partial A}{\partial A_{nn}}} = \frac{A}{A_1},$$

worin A_1 nichts anderes bedeutet, als die Determinante der quadratischen Form $\varphi(x_1, x_2, .. x_{n-1}, 0.)$ Dieselbe darf natürlich nicht verschwinden. Setzt man dann:

$$\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n) = \frac{A}{A_1} x_n^2 + \varphi'(x_1', x_2' \ldots x_{n-1}'),$$

wobei $\varphi(x_1', x_2', .. x_{n-1}') = \varphi(x_1 - \frac{l_1}{l_n} x_n, x_2 - \frac{l_2}{l_n} x_n, .. x_{n-1} - \frac{l_{n-1}}{l_n} x_n, 0)$

ist, so kann man auf die Function $\varphi(x_1', x_2', .. x_{n-1}')$ genau dasselbe Verfahren anwenden, wie auf $\varphi(x_1, x_2, .. x_n)$, indem man zunächst das Quadrat von x_{n-1}' absondert u. s. f. Beachtet man dabei, dass die Determinante der durch derartige Absonderung von μ Quadraten entstehenden Function von $n-\mu$ Veränderlichen genau dieselbe ist, wie die Determinante der Function, welche aus der ursprünglichen Function entsteht, wenn man in derselben die μ letzten Veränderlichen annullirt, so erhält man, diese Determinante mit A_μ bezeichnend, folgende Darstellung unserer Function $\varphi(x_1, x_2, .. x_n)$:

$$\varphi(x_1, x_2, .. x_n) = \frac{A}{A_1} x_n^2 + \frac{A_1}{A_2} x_{n-1}'^2 + \dots + \frac{A_{n-2}}{A_{n-1}} (x_2^{(n-2)})^2 + A_{n-1} (x_1^{(n-1)})^2$$

Soll nun die Function $\varphi(x_1, x_2, .. x_n)$ beständig positiv sein und nur dann verschwinden, wenn sämmtliche Veränderliche verschwinden, so müssen die Coefficienten rechterseits sämmtlich grösser als 0 sein. Daher der Satz:

Damit die quadratische Form $\varphi(x_1, x_2, .. x_n) = \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu$ eine definite sei und beständig positiv bleibe, ist erforderlich und hinreichend, dass die Grössen

$A, A_1, .. A_{n-1}$, welche definirt werden durch die Gleichung

$$A_\mu = \sum \pm A_{11} A_{22} \dots A_{n-\mu, n-\mu}$$

sämmtlich positiv und von 0 verschieden seien. Soll dagegen die Function beständig negativ bleiben, so muss von der Grössen $A_{n-1}, \dots A_1, A$ die erste negativ, die folgenden abwechselnd positiv und negativ sein.

Mit der Erledigung dieser Frage ist zugleich unsere ursprüngliche Untersuchung über das Maximum oder Minimum der Function $f(x_1, x_2, .. x_n)$ zu Ende geführt. Nach dem pag. 13 angegebenen Satze wird nämlich für ein reelles Wurzelsystem $a_1, .. a_n$ der Gleichung 6) das eine oder das andere eintreten, wenn die homogene Function zweiten Grades

$$\sum_{\lambda,\mu} \left(\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, .. x_n)}{\partial x_\lambda \cdot \partial x_\mu}\right)_{a_1, a_2, .. a_n} h_\lambda h_\mu \equiv \sum_{\lambda,\mu} f_{\lambda\mu}(a_1, a_2, .. a_n)$$

eine definite quadratische Form ist; d. h. es wird ein Minimum an der Stelle $a_1, a_2, .. a_n$ eintreten, falls die Quotienten:

$$\frac{F_0}{F_1}, \frac{F_1}{F_2}, \dots \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}, F_{n-1} \text{ wo } F_\mu = \sum \pm f_{11} f_{22} \dots f_{n-\mu,}$$

sind, sämmtlich positiv, ein Maximum, wenn

sie sämmtlich negativ und in beiden Fällen von o verschieden sind. Diese letztere Bedingung ist im Allgemeinen durchaus notwendig, denn wäre etwa $F_0 = \sum \pm f_{11} f_{22} \cdots f_{nn} = 0$, so würde diese Gleichung, wenn $\sum_{\lambda \mu} f_{\lambda\mu} h_\lambda h_\mu$ mit $\varphi(h_1, h_2, \ldots h_n)$ bezeichnet wird unmittelbar das Bestehen einer Relation von der Form:

$$\sum_\nu k_\nu \varphi_\nu (h_1, \ldots h_n) = 0$$

nach sich ziehen, worin die k_ν Constanten bedeuten, welche nicht alle verschwinden. Ist also etwa $k_n \gtrless 0$, so könnte man

$$\varphi_n = - \frac{1}{k_n} \sum_{\nu=1}^{n-1} k_\nu \varphi_\nu$$

setzen, und man erhielte mit Hilfe dieser Relation aus der Gleichung

$$\varphi(h_1, \ldots h_n) = \sum_{\lambda=1}^{n-1} \varphi_\lambda (h_1, \ldots h_n) . h_\lambda = \varphi_n h_n + \sum_{\lambda=1}^{n-1} \varphi_\lambda h_\lambda$$

die folgende

$$\varphi(h_1, \ldots h_n) = \sum_{\lambda=1}^{n-1} \varphi_\lambda (h_1, \ldots h_n) \left(h_\lambda - \frac{k_\lambda}{k_n} h_n\right)$$

wählte man daher die willkürlichen Grössen h etwa so, dass

$$h_\lambda = \frac{k_\lambda}{k_n} h_n$$

ist, so erkennt man, dass die Function $\varphi(h_1, h_2, \ldots h_n)$ verschwinden würde, ohne dass sämmtliche Veränderlichen $h_1, h_2, \ldots h_n$ gleichzeitig verschwinden. Es würde somit bei diesem Wertsysteme der h

die Entwickelung der Differenz $f(x_1,..x_n) - f(a_1,...a_n)$ mit Gliedern dritter Dimension anfangen, d. h. die Function $f(x_1, x_2 .. x_n)$ würde an der Stelle $a_1, a_2, .. a_n$ kein Maximum oder Minimum besitzen, es sei denn, dass auch diese Glieder alle verschwänden, und das Aggregat der Glieder vierter Dimension einen beständig negativen oder beständig positiven Werth besässen. Hierfür hat man aber noch nicht die Criterien aufzustellen vermocht; es ist indessen um so unwahrscheinlicher, dass ein solcher Fall eintritt, je grösser die Anzahl der Veränderlichen ist, da sich alsdann die Bedingungen dafür mehr und mehr häufen.

Hiermit wäre der Gegenstand dieses Capitels vollständig behandelt; indessen erscheinen die Bedingungen dafür, dass eine homogene quadratische Function eine definite sei, in einer wenig symetrischen Gestalt aus dem Grunde, weil wir (cfr. pag. 21) gewisse Veränderliche vor den anderen bevorzugt haben. Wir werden daher im nächsten Capitel hierauf noch einmal zurückkommen.

Capitel 2.
Theorie der Maxima und Minima von Functionen mehrerer Veränderlichen unter Voraussetzung von Nebenbedingungen.

In den vorhergehenden Untersuchungen waren die Veränderlichen $x_1, x_2, .. x_n$ vollständig von einander unabhängige Grössen. Jetzt stellen wir uns die Aufgabe:

Unter allen Wertsystemen $x_1, x_2, .. x_n$ diejenigen zu finden, welche die Function $F(x_1, x_2, .. x_n)$ zu einem Maximum oder Minimum machen und zugleicher Zeit den m Bedingungsgleichungen genügen:

$$1)\quad f_\lambda(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \quad (\lambda = 1, 2 .. m)$$

worin die f_λ Functionen von demselben Character sein sollen, wie F selbst (cfr. pag. 5)

Der Weg, welcher sich am natürlichsten zur Lösung dieser Aufgabe darbietet, wird der sein, dass man versucht, aus den Gleichungen (1) m Veränder-

lichen durch die $n-m$ anderen auszudrücken und sodann ihre Werte in die Function $F(x_1, x_2, .. x_n)$ einsetzt. Diese wird dann nur noch von $n-m$ Veränderlichen abhängig sein, welche nun aber völlig unabhängig von einander sind, und man würde somit die vorliegende Aufgabe auf die frühere zurückgeführt haben. Dieses Verfahren ist jedoch in den meisten Fällen practisch unausführbar, da es nicht immer möglich ist aus den Gleichungen 1, m Veränderliche als Functionen der $n-m$ übrigen wirklich darzustellen. Wir müssen uns daher nach einem anderen zweckmässigen Verfahren umsehen.

Ist $a_1, a_2 .. a_n$ irgend ein Wertsystem der Grössen $x_1, x_2, .. x_n$, welches den Gleichungen 1) genügt, so können von den in der Umgebung dieser Stelle gelegenen Wertsystemen $x_1 = a_1 + h_1, ... x_n = a_n + h_n$ nur diejenigen in Betracht kommen, welche ebenfalls den Gleichungen 1) Genüge leisten, für welche also

$$2)\quad f_\lambda(a_1 + h_1, .. a_n + h_n) = 0 \quad (\lambda = 1, 2, .. m)$$

ist, oder bei denen die h den Gleichungen genügen:

3) $\sum_{\mu=1}^{n} f_{\lambda\mu}(a_1, a_2, .. a_n)\, h_\mu + (h_1, h_2, .. h_n)^2_\lambda = 0, \; (\lambda = 1, 2, .. m)$

worin $(h_1, h_2, .. h_n)^2$ die Glieder zweiter und höherer Dimension bezeichnet. – Vorausgesetzt nun, das wenigstens eine der Determinanten m^{ten} Grades, welche aus dem System der $n\,m$ Grössen

$$4) \quad \begin{matrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mn} \end{matrix}$$

durch Weglassung von $n - m$ Vertikalreihen gebildet werden können, von 0 verschieden ist, lassen sich nach einem bekannten Verfahren, welches in der Functionentheorie auseinandergesetzt wird, m von den Grössen h durch die $n - m$ übrigen, welche mit $k_1, k_2 .. k_{n-m}$ bezeichnet werden mögen, in der Form von Potenzreihen wirklich darstellen, wie folgt:

5) $h_\lambda = (k_1, k_2, .. k_{n-m})^{(1)}_\lambda + (k_1, k_2, .. k_{n-m})^{2} + .., \; (\lambda = 1, 2 .. m)$

Hierin bezeichnen die oberen Indices die Dimensionen der betreffenden Glieder. Diese Potenzreihen erfüllen identisch die Gleichun-

gen 2) und ergeben, wenn die Grössen $\kappa_1, \kappa_2, \ldots \kappa_{n-m}$ hinlänglich klein angenommen werden, sämmtliche Werte der m Grössen h, welche ebenfalls eine gewisse Grenze nicht überschreiten. – Denkt man sich nun diese Werte der m Grössen h in die Differenz $F(x_1, x_2, \ldots x_n) - F(a_1, a_2, \ldots a_n)$ eingesetzt, so wird dieselbe nur noch abhängig von den $n-m$ von einander unabhängigen Veränderlichen $\kappa_1, \kappa_2, \ldots \kappa_{n-m}$ und kann somit für genügend kleine Werte derselben entwickelt werden in der Form:

$$6) \quad F(x_1, x_2, \ldots x_n) - F(a_1, a_2, \ldots a_n) = \sum_{\varrho=1}^{n-m} E_\varrho \kappa_\varrho + \frac{1}{2} \sum_{\varrho, \sigma} E_{\varrho\sigma} \kappa_\varrho \kappa_\sigma$$

Damit nun an der Stelle $a_1, a_2, \ldots a_n$ ein Maximum oder Minimum der Function $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eintrete ist nach pag. zunächst erforderlich, dass die Glieder erster Dimension verschwinden, d. h. es muss sein:

$$7) \quad E_\varrho = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots n-m).$$

Diese Bedingungsgleichungen lassen sich aber leicht noch anders ausdrücken. Man erhält nämlich die Grössen E offenbar auch so, dass man in der Entwicklung:

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n) - F(a_1, a_2, \ldots a_n) = \sum_{\mu=1}^{n} F_\mu h_\mu + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} F_{\mu\nu} h_\mu h_\nu$$

die auf die Glieder erster Dimension reducirten Werte der m Grössen h aus 5.) substituirt und das Resultat nach den $k_1, k_2, \ldots k_{n-m}$ ordnet, oder mit anderen Worten die Gleichungen 7) sagen aus, dass der Ausdruck $\sum_{\mu=1}^{n} F_\mu h_\mu$ identisch verschwinden muss für alle Wertsysteme der h, welche den auf ihre linearen Glieder reducirten m Gleichungen 3), d. h. also den Gleichungen

$$8)\quad \sum_{\mu=1}^{n} f_{\lambda\mu}\, h_\mu = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots m)$$

genügen. Multipliciren wir nun diese m Gleichungen der Reihe nach mit m willkürlichen Constanten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m$ und addiren sie dann zu der Gleichung

$$\sum_{\mu=1}^{n} F_\mu h_\mu = 0$$

so muss auch folgende Gleichung bestehen:

$$9)\quad \sum_{\mu=1}^{n} (F_\mu + \varepsilon_1 f_{1\mu} + \varepsilon_2 f_{2\mu} + \ldots + \varepsilon_m f_{m\mu})\, h_\mu = 0.$$

Nun kann man aber die m Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m$ immer so bestimmen, dass diejenigen Glieder dieser Summe wegfallen, welche die m Grössen h enthalten, die in 5) durch die $n-m$ andern ausgedrückt sind; denn man erhält durch Annullirung dieser Glieder ein System von m linearen Gleichungen

deren Determinante nach Voraussetzung pag. 30 nicht verschwindet. Da nunmehr die übrig bleibenden Glieder der Gleichung 9) mit den völlig willkürlichen Grössen $\kappa_1, \kappa_2, \ldots \kappa_{n-m}$ multiplicirt sind, so kann diese Gleichung nicht anders bestehen, als wenn jeder Coefficient einzeln gleich 0 ist. Mithin erhalten wir als erste notwendige Bedingung für das Eintreten eines Maximums oder Minimums das Bestehen folgenden Systems von n Gleichungen:

$$F_\mu + \varepsilon_1 f_{1\mu} + \varepsilon_2 f_{2\mu} + \ldots + \varepsilon_m f_{m\mu} = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots n)$$

und zwar in dem Sinne, dass wenn m von einander unabhängige Gleichungen dieses Systems bestehen, die $n-m$ übrigen durch Substitution der durch die ersteren bestimmten Werte der ε zugleich identisch erfüllt sein müssen, vorausgesetzt, dass das Wertsystem $a_1, a_2, \ldots a_n$ bereits so gewählt ist, dass die Gleichungen 1) befriedigt sind. – Alles zusammenfassend können wir sagen:

Damit die Function $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ an an irgend einer Stelle $x_1, x_2, \ldots x_n$ ein Maximum oder Minimum besitze, ist es

notwendig, dass die n+m Gleichungen:

$$10) \quad \frac{\partial F}{\partial x_\mu} + \varepsilon_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_\mu} + \varepsilon_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_\mu} + \dots + \varepsilon_m \frac{\partial f_m}{\partial x_\mu} = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots n)$$

$$f_\lambda(x_1, x_2, \dots x_n) = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots m)$$

durch ein System reeller Werte der n+m Grössen $x_1, x_2, \dots x_n, \varepsilon_1, \dots \varepsilon_m$ befriedigt werden können.

Die gegebenen Deductionen sind an die eine Voraussetzung geknüpft, dass wenigstens eine der Determinanten m^{ten} Grades, welche aus den n m Grössen 4.) durch Weglassung von n−m Verticalreihen gebildet werden können, nicht verschwindet. Diese Voraussetzung war nötig einmal zur Bestimmung der Grössen h, welche den Gleichungen 2.) genügen, sodann zur Bestimmung der m Factoren $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_m$. Es kann jedoch unter Umständen ein Maximum oder Minimum der Function $F(x_1, x_2, \dots x_n)$ an der Stelle $a_1, a_2, \dots a_n$ auch dann noch eintreten, wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind. Denn gelingt es auf irgend eine Weise, sämmtliche, eine gewisse Grenze nicht überschreitendes Wertsysteme der h zu bestimmen, welche die Gleichungen 2.) befriedigen, so geben die Gleichungen 7.) zusammen mit den Gleichungen 1.) die genügende Anzahl von Gleichungen zur

Bestimmung der n Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$. Das Nichterfülltsein jener Voraussetzung bedeutet nichts anderes, als dass die Gleichungen 8) identisch bestehen, dass somit die zur Bestimmung der Grössen h dienenden Gleichungen 3, mit Gliedern zweiter Dimension beginnen. Man kann in diesem Falle häufig mit Vorteil so verfahren, dass man an Stelle der ursprünglichen Veränderlichen ein sogenanntes System von unabhängigen Bestimmungsstücken d. h. $n-m$ Veränderliche von der Beschaffenheit einführt, dass durch Substitution derselben die gegebenen Bedingungsgleichungen identisch erfüllt werden. – Zur Erläuterung des Gesagten möge folgendes Beispiel dienen, dessen allgemeine Lösung weiter unten folgen soll:

Liegt nämlich die Aufgabe vor, die kürzeste Linie aufzusuchen, welche von einem gegebenen Punkte aus nach einer gegebenen Fläche $f(x, y, z) = 0$ gezogen werden kann, so erhält man auf die Fläche gewisse Punkte von der Beschaffenheit, dass die Verbindungslinien derselben mit dem gegebenen Punkte die verlangte Eigenschaft besitzen und ausserdem in diesen Punkten auf der Fläche normal stehen. Trifft es sich nun zufällig, dass einer dieser Punkte ein Knotenpunkt der Fläche ist, so dass in ihm $f_1 = 0 \ldots f_2 = 0, f_3 = 0$

so fallen in der That für diesen die Glieder erster Dimension in den Gleichungen 3.) weg, und wir haben den eben erwähnten Fall. Ist nun etwa die Fläche ein gerader Kreiskegel, also

$$f\ (x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

so kann man z. B. setzen:

$$11.)\quad \begin{aligned} x &= 2uv \\ y &= u^2 - v^2 \\ z &= u^2 + v^2, \end{aligned}$$

wodurch die Gleichung der Fläche identisch erfüllt wird, und man sieht leicht ein, dass man die Grössen h_1, h_2, h_3 durch zwei von einander unabhängige Grössen k_1, k_2 ausdrücken kann auch in dem Falle, wo der gesuchte Punkt der Fläche die Spitze des Kegels, also der Punkt ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) oder $u = 0$, $v = 0$ ist und zwar so, dass nicht nur unendlich kleinen Werten von k_1 und k_2 unendlich kleine Werte von h_1, h_2 und h_3 entsprechen, sondern dass man auch alle Wertsysteme von h_1, h_2, h_3 erhält, welche der Gleichung $f(x+h_1, y+h_2, z+h_3) = 0$ genügen. Man hat dabei allerdings den Veränderlichen einmal reelle, das andere Mal rein imaginäre Werte beizulegen, wenn die Gleichungen 11.) die ganze Kegelfläche darstellen sollen. Dadurch wird aber der leider nicht zu umgehende Übelstand herbeigeführt, dass die gestellte

Aufgabe in zwei gleichartige Teile zerfällt, die jedoch nach der im ersten Kapitel auseinandergesetzten Methode behandelt werden können. –

~~(Es handelt sich nun weiter darum)~~

In anderen Fällen wird man ähnlich verfahren können; die besondere Aufgabe wird jedesmal das zweckmässigste Verfahren leicht erkennen lassen.

Es handelt sich nun weiter darum, die Criterien aufzustellen, nach denen man entscheiden kann, ob an einer nach den Vorschriften des Satzes auf pag. 35 bestimmten Stelle $a_1, a_2, .. a_n$ ein Maximum oder Minimum der Function $F(x_1, .. x_n)$ wirklich stattfindet oder nicht. Man könnte dies als überflüssig betrachten, da nach den im vorigen Kapitel gegebenen Criterien ein Maximum oder Minimum sicher eintreten wird, wenn das Aggregat der Glieder zweiter Dimension in Formel 6.) eine definite quadratische Form ist. Indessen ist es wünschenswert, eine Entscheidung treffen zu können, ohne vorher die Entwicklung der Function in der Form 6, gemacht zu haben. Um nämlich die Coefficienten $E_{\varrho\sigma}$ zu erhalten, müsste man bei der Substitution der Werte 5, in die Entwicklung:

$$F(x_1, x_2, .. x_n) - F(a_1, a_2, .. a_n) = \sum_{\mu=1}^{n} F_\mu h_\mu + \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu} F_{\mu\nu} h_\mu h_\nu + ..$$

nicht nur die Glieder erster, sondern auch noch

die zweiten Dimension in den Ausdrücken 5.) berücksichtigen. Doch kann man dieses vermeiden, wenn man zu vorstehender Differenz die mit ε_μ ($\mu = 1, \ldots m$) multiplicirten Ausdrücke 2, welche ja identisch verschwinden, addirt und dann den ganzen Ausdruck entwickelt nach Potenzen der h. In dieser Entwicklung können Glieder erster Dimension der Gleichung 9, zufolge nicht mehr vorkommen, und es ergiebt sich somit, wenn man

$$12)\quad F + \sum_{\mu=1}^{m} \varepsilon_\mu f_\mu = G$$

setzt:

$$13,\quad F(x_1, \ldots x_n) - F(a_1, \ldots a_n) = G(x_1, \ldots x_n) - G(a_1, \ldots a_n) = \tfrac{1}{2} \sum_{\mu,\nu} G_{\mu\nu} h_\mu h_\nu + \ldots$$

Man erhält daher die homogene Function zweiten Grades $\sum_{\varrho,\sigma} E_{\varrho\sigma} k_\varrho k_\sigma$ der Formel 6.), wenn man in $\sum_{\mu\nu} G_{\mu\nu} h_\mu h_\nu$ die Werte 5.) substituirt, dabei aber nur die Glieder erster Dimension berücksichtigt. Indem man dann hierauf die Criterien des vorigen Capitels anwendet, kann man entscheiden, ob die Function $F(x_1, \ldots x_n)$ an der Stelle $a_1, \ldots a_n$ ein Maximum resp. Minimum besitzt oder nicht.

Die auf diese Weise sich ergebenden definitiven Bedingungen sind jedoch aus doppeltem Grunde unsymmetrisch, einmal deshalb, weil wir bei der Bestimmung der Grössen h einige vor den andern bevorzugt

haben, anderseits deshalb, weil diejenigen Ausdrücke, durch welche entschieden werden soll, ob die Function zweiten Grades beständig positiv oder negativ sei, ebenfalls nicht symmetrisch aus den Coefficienten der Function gebildet sind. Es ist daher von Interesse ein von diesen Mängeln freies Criterium herzustellen, welches überdies zugleich in vielen Fällen eine Deutung zulässt der erhaltenen Resultate. Indem wir somit auf das bereits im vorigen Kapitel behandelte Problem zurückkommen, stellen wir uns jetzt folgende, etwas allgemeinere Aufgabe:

Es ist gegeben eine homogene Function zweiten Grades:

$$14.)\ \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{\lambda,\mu} A_{\lambda\mu}\, x_\lambda\, x_\mu$$

$$A_{\lambda\mu} = A_{\mu\lambda}$$

von n Veränderlichen, welche den m linearen und homogenen Bedingungsgleichungen:

$$15.)\ \vartheta_\lambda \equiv \sum_\mu a_{\lambda\mu}\, x_\mu = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots m),\ m < n$$

unterworfen sind. Es sollen die Bedingungen aufgestellt werden, unter denen die Function φ für alle diejenigen Wertsysteme der Veränderlichen, welche die Gleichungen 15.) befriedigen beständig positiv, oder beständig

negativ ist.

Es reicht hin, diese Aufgabe zu lösen unter der Beschränkung, dass man den Grössen x noch die weitere Bedingung, dass:

$$16) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

sein solle auferlegt. Denn ist φ eine definite quadratische Form, so ist sie es auch für diejenigen Werte von $x_1, \dots x_n$, welche der Gleichung 16) genügen. Aber auch umgekehrt, wenn die gestellte Anforderung erfüllt wird für alle diejenigen Wertsysteme der x, welche den Gleichungen 15) und 16) zugleich genügen, so ist sie überhaupt erfüllt für alle Wertsysteme der x, welche allein die Gleichungen 15) befriedigen. Denn ist $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ ein Wertsystem der x, für welches

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \xi_\lambda^2 = 1, \quad \vartheta_\lambda(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = 0 \qquad \lambda = 1, 2, \dots m$$

und $\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$ eine definite Form ist und setzt man

$$x_1 = \beta\,\xi_1, \; x_2 = \beta\,\xi_2, \dots x_n = \beta\,\xi_n,$$

wo β eine beliebige von 0 verschiedene Grösse ist, so ist auch:

$$\vartheta_\lambda(x_1, x_2, \dots x_n) = 0 \text{ und } \varphi(x_1, x_2, \dots x_n) = \beta^2 \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n),$$

also $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$ immer dann positiv, ~~wenn~~ $\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$ positiv oder negativ, wenn letzteres

negativ ist. Es ist daher durchaus statthaft, die Bedingung 16) noch hinzuzufügen. Hierdurch haben wir aber einen sehr wesentlichen Vorteil erreicht; da nämlich der Bedingung 16) zufolge keine der Veränderlichen aus dem Intervall $-1 \ldots +1$ heraustreten kann, und da ferner die Function φ sich stetig ändert, so muss sie notwendig für die in Betracht kommenden Werte der Veränderlichen $x_1, \ldots x_n$ eine obere und eine untere Grenze besitzen, d. h., es muss notwendig unter allen Wertsystemen, welche die Bedingungen 15) und 16) erfüllen, eines existiren, für welches die Function φ ein Maximum und eines, wofür sie ein Minimum ist. Wir beschränken uns darauf, das letztere aufzusuchen.

Durch Hinzufügung der Gleichung 16) haben wir somit die pag. 40 f. gestellte Aufgabe selbst auf eine Aufgabe aus der Theorie der Maxima und Minima zurückgeführt; denn ist das Minimum von $\varphi(x_1, \ldots x_n$ positiv, so ist sicher φ eine definite positive Form:

Setzt man:

$$17)\quad G = \varphi - \varepsilon\left(\sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda^2 - 1\right) + 2\sum_{\rho=1}^{m} \varepsilon_\rho \vartheta_{\rho 1}$$

so haben wir, um die Stelle zu finden, an welcher das Minimum stattfindet

nach dem pag. 35 f. angegebenen Satze das System von n Gleichungen zu bilden:

$$\frac{\partial G}{\partial x_\lambda} = 0 \quad (\lambda = 1, 2, .. n)$$

Dies giebt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_\lambda} - 2\varepsilon x_\lambda + 2 \sum_{\varrho=1}^{m} \varepsilon_\varrho \frac{\partial \vartheta_\varrho}{\partial x_\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2 .. n)$$

oder:

$$18) \sum_{\mu=1}^{n} A_{\lambda\mu} x_\mu - \varepsilon x_\lambda + \sum_{\varrho=1}^{m} \varepsilon_\varrho a_{\varrho\lambda} = 0 \quad (\lambda = 1 2 .. n)$$

Aus den $n+m+1$ Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{n} A_{\lambda\mu} x_\mu - \varepsilon x_\lambda + \sum_{\varrho=1}^{m} \varepsilon_\varrho a_{\varrho\lambda} = 0 \quad (\lambda = 1, 2, .. n)$$

$$19) \; \vartheta_\varrho = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\varrho\mu} x_\mu = 0 \qquad (\varrho = 1, 2 ... m)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda^2 = 1$$

sind daher die $n+m+1$ Grössen $x_1, x_2, .. x_n, \varepsilon_1, .. \varepsilon_m, \varepsilon$ zu berechnen. Da wir nun von vornherein wissen, dass an einer Stelle ein Minimum der Function φ wirklich stattfinden muss, so sind wir sicher, dass dieses Gleichungssystem mindestens ein reelles Wertsystem bestimmen muss. Da somit die $n+m$ ersten homogenen linearen Gleichungen mit einander verträglich und nach den Unbekannten $x_1, x_2, .. x_n\; \varepsilon_1, .. \varepsilon_m$ auflösbar sein müssen, so muss ihre Determinande verschwinden, d. h. es ist:

$$20) \quad \Delta\varepsilon \equiv \begin{vmatrix} A_{11}-\varepsilon, & A_{12} & \ldots & A_{1n}, & a_{11} & \ldots & a_{m1} \\ A_{21}, & A_{22}-\varepsilon & \ldots & A_{2n}, & a_{12} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1}, & A_{n2} & \ldots & A_{nn}-\varepsilon, & a_{1n} & \ldots & a_{mn} \\ a_{11}, & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Die Gleichung $\Delta\varepsilon = 0$ ist offenbar in Bezug auf ε vom $n-m$ ten Grade. Unter den Wurzeln dieser Gleichung befindet sich notwendig das gesuchte Minimum der Function $\varphi(x_1, \ldots x_n)$. Denn multipliciren wir die Gleichungen 18) der Reihe nach mit $x_1, x_2, \ldots x_n$ und addiren sie, so erhalten wir:

$$21) \quad \varphi(x_1, \ldots x_n) = \varepsilon,$$

vorausgesetzt, dass das Wertsystem $x_1, x_2 \ldots x_n$ zusammen mit den Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m$ das System der Gleichungen 19) befriedigt, was nur möglich ist, wenn ε eine Wurzel der Gleichung $\Delta\varepsilon = 0$ ist. Da nun unter ~~das~~ den Gleichungssystem 19) befriedigenden Wertsystemen der x ~~auch~~ dasjenige sich vorfindet, welches das Minimum hervorruft, und da der zu einem solchen Wertsysteme gehörige Wert der Function stets eine Wurzel der Gleichung 20) ist, so

muss auch der gesuchte Minimalwert von $\varphi(x_1, x_2, .. x_n)$ unter den Wurzeln dieser Gleichung enthalten sein. Wie bereits bemerkt, muss dieser Minimalwert positiv sein, wenn die Function $\varphi(x_1, .. x_n)$ für die in Betracht kommenden Wertsysteme der x beständig positiv sein soll, und hieraus folgt, dass die Gleichung $\Delta\varepsilon = 0$ lauter positive Wurzeln haben muss. Denn wäre auch nur eine Wurzel derselben negativ, so würde man für diese ein reelles System von Werten $x_1, x_2 .. x_n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, .. \varepsilon_m$ bestimmen können, für welches, wie aus Gleichung 21) hervorgeht, die Function $\varphi(x_1, x_2, .. x_n)$ ebenfalls negativ wäre.

Damit also die gegebene Function $\varphi(x_1, .. x_n)$ für alle Wertsysteme der x, welche die Gleichungen 15) befriedigen, beständig positiv sei, ist notwendig und hinreichend, dass die Gleichung $\Delta\varepsilon = 0$ lauter positive Wurzeln habe.

Es erhebt sich daher jetzt die Frage, wann die Gleichung $\Delta\varepsilon = 0$ nun wirklich lauter positive Wurzeln hat. Diese Frage kann zwar immer mit Hilfe des Sturm'schen Satzes vollkommen streng beantwortet werden, aber abgesehen davon, dass die

Untersuchung äusserst schwierig wäre, würde auch die Symmetrie, die wir ja gerade wahren wollen, verloren gehen. Deshalb fügen wir den Beweis hinzu, dass die Gleichung $\Delta\varepsilon = 0$ nur reelle Wurzeln hat; ist dies geschehen, so sind die Criterien dafür, dass dieselben sämmtlich positiv sind, leicht anzugeben. Denn entwickelt man die Determinante nach Potenzen von ε, wie folgt:

$$22)\quad \varepsilon^{n-m} - B_1 \varepsilon^{n-m-1} + B_2 \varepsilon^{n-m-2} - \ldots + (-1)^{n-m} B_{n-m} = 0,$$

so müssen, wenn sämmtliche Wurzeln der Gleichung reell und positiv sind, auch die Coefficienten $B_1, B_2, \ldots B_{n-m}$ sämmtlich positiv und von 0 verschieden sein; umgekehrt, sind die Wurzeln jener Gleichung reell und die Coefficienten $B_1, \ldots B_{n-m}$ sämmtlich grösser als 0, so sind auch die Wurzeln der Gleichung $\Delta\varepsilon = 0$ alle positiv.

Wir weisen die Realität der Wurzeln der Gleichung $\Delta\varepsilon = 0$ zunächst für den Fall nach, dass keine Bedingungsgleichungen 15) vorhanden sind. Es reducirt sich dann die Gleichung 20) auf die folgende:

$$23.)\quad \begin{vmatrix} A_{11}-\varepsilon, & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22}-\varepsilon & \ldots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn}-\varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

eine Gleichung, die den Namen der Gleichung der sämmtlichen Störungen führt und bei vielen analytischen Untersuchungen eine wichtige Rolle spielt, z. B. eben zur Bestimmung der säcularen Störungen der Planetenbahnen sowie bei der Bestimmung der Hauptachsen von Linien und Flächen zweiten Grades.

Der von Weierstrass gegebene, sehr einfache Beweis der Wurzeln dieser Gleichung stützt sich einzig und allein auf den Satz, dass, wenn die Determinante eines Systems von n homogenen linearen Gleichungen verschwindet, es immer möglich ist, diese Gleichungen zu befriedigen durch Werte von $x_1 \ldots x_n$, die nicht alle gleich 0 sind. – Statt der Bedingungsgleichung 16) unterwerfen wir die Veränderlichen der etwas allgemeineren Gleichung:

$$\psi(x_1, x_2, \ldots x_n) = 1,$$

worin ψ eine homogene Function zweiten Grades bedeutet, welche stets positiv und nur dann gleich 0 ist, wenn die Veränderlichen selbst alle verschwinden. Bilden wir alsdann das Gleichungssystem:

$$24) \quad \varphi_\lambda - \varepsilon\, \psi_\lambda = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n),$$

so wird dasselbe immer auflösbar sein, sobald seine Determinante verschwindet. Diese Determinante stimmt für den Fall, dass $\psi = \sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda^2$ ist, mit der in 23) vorkommenden überein.

Wir nehmen an, es sei $\varepsilon = k + li$ und man habe als Wertsystem, welches die Gleichungen befriedigt $x_\lambda = \xi_\lambda + \eta_\lambda i$, $(\lambda = 1, 2, .. n)$ gefunden; dann müsste sein:

$$\varphi_\lambda(\xi_1 + \eta_1 i, .. \xi_n + \eta_n i) - (k + li)\psi_\lambda(\xi_1 + \eta_1 i, \dots \xi_n + \eta_n i) = 0 \quad (\lambda = 1, 2, ..)$$

Hieraus würden sich, wenn man den Ausdruck auf der linken Seite in seinen reellen und imaginären Teil zerlegt, wobei zu beachten, dass φ_λ und ψ_λ lineare Functionen sind, die Gleichungen ergeben:

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(\xi_1, .. \xi_n) - k\,\psi_\lambda(\xi_1, .. \xi_n) + l\,\psi_\lambda(\eta_1, .. \eta_n) &= 0 \\ \varphi_\lambda(\eta_1, .. \eta_n) - k\,\psi_\lambda(\eta_1, .. \eta_n) - l\,\psi_\lambda(\xi_1, .. \xi_n) &= 0. \end{aligned} \quad (\lambda = 1, 2, ..)$$

Multipliciert man diese Gleichungen resp. mit η_λ und ξ_λ, summirt dann über λ von 1 bis n und subtrahirt dann die sich ergebenden Gleichungen, so erhält man, da

$$\sum_\lambda \eta_\lambda \varphi_\lambda(\xi_1, .. \xi_n) = \sum_\lambda \xi_\lambda \varphi_\lambda(\eta_1, .. \eta_n)$$

und

$$\sum_\lambda \eta_\lambda \psi_\lambda(\xi_1, .. \xi_n) = \sum_\lambda \xi_\lambda \psi_\lambda(\eta_1, .. \eta_n)$$

ist, die Gleichung:

$$l\left\{\sum \eta_\lambda \psi_\lambda(\eta_1, .. \eta_n) + \sum \xi_\lambda \psi_\lambda(\xi_1, .. \xi_n)\right\} = 0$$

oder

$$25)\quad l\,(\varphi(\eta_1, \ldots \eta_n) + \varphi(\xi_1, \ldots \xi_n)) = 0$$

Ist es also möglich, Wertsysteme der Grössen $x_1, \ldots x_n$ zu finden, welche die Gleichungen 24) befriedigen, unter der Annahme, dass $\varepsilon = \varkappa + l\,i$ sei, so müssen jene Werte $x_1, \ldots x_n$ zugleich der Gleichung 25) genügen. Da nun aber die in Paranthese gesetzte Grösse nach den über φ gemachten Voraussetzungen nicht verschwinden kann, so muss $l = 0$ sein, d. h. jeder Wert von ε, für welchen die Determinante der Gleichungen 21.) verschwindet, ist reell. – Also:

Damit eine quadratische Form $\varphi(x_1, \ldots x_n) = \sum_{\lambda,\mu} A_{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu$ beständig positiv sei, ist es notwendig und hinreichend, dass die Entwicklung der Determinante 23.), welche nur reelle Wurzeln zulässt, nach Potenzen von ε, nämlich:

$$26)\quad \varepsilon^n - B_1\,\varepsilon^{n-1} + B_2\,\varepsilon^{n-2} - \ldots + (-1)^n B_n = 0$$

aus $n+1$ Gliedern bestehe und nur Zeichenwechsel aufweise. Soll dagegen die Function beständig negativ sein, so muss die Gleichung 26) vollständig sein und nur Zeichenfolgen haben.

Hiermit sind die genauen Bedingungen für das Definitsein einer homogenen quadratischen Form

direct aus den Coefficienten derselben in vollkommen symmetrischer Form für den Fall abgeleitet, dass die Veränderlichen keinen Bedingungen unterworfen sind. Der Fall, wo noch Bedingungsgleichungen vorhanden sind lässt sich leicht auf ersteren zurückführen.

Die Determinante 20) war das Resultat der Elimination der Grössen $x_1, x_2, .. x_n, \varepsilon_1, .. \varepsilon_m$ aus den $n+m$ Gleichungen:

$$18)\quad \sum_{\mu=1}^{n} A_{\lambda\mu} x_\mu - \varepsilon x_\lambda + \sum_{\varrho=1}^{m} \varepsilon_\varrho a_{\varrho\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, .. n)$$

$$15)\quad \vartheta_\varrho \equiv \sum a_{\varrho\mu} x_\mu = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, .. m)$$

Da das Resultat der Elimination unabhängig ist von der Art und Weise, wie dieselbe ausgeführt wird, so denke man sich zunächst aus den m Gleichungen $\vartheta_\varrho = 0$ m von den Grössen x, etwa $x_1, x_2, .. x_n$ durch die $n-m$ übrigen, welche mit $\xi_1, \xi_2, .. \xi_{n-m}$ bezeichnet werden mögen, ausgedrückt, also

$$27)\quad x_\mu = \sum_{\nu=1}^{n-m} c_{\mu\nu} \xi_\nu \qquad (\mu = 1, 2, .. m)$$

Durch Substitution dieser Werte möge $\varphi(x_1, x_2, .. x_n)$ übergehen in $\bar{\varphi}(\xi_1, .. \xi_{n-m})$ und die Gleichung $\sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda^2 = 1$ in $\psi(\xi_1 .. \xi_{n-m}) = 1$ wo dann ψ eine Function ist, die beständig positiv und nur dann gleich 0 ist, wenn die Veränderlichen

selbst alle verschwinden. – Die Gleichungen 18) können wir in der Form schreiben:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\lambda} - \varepsilon x_\lambda + \sum_{\varrho=1}^{m} \varepsilon_\varrho \frac{\partial \vartheta_\varrho}{\partial x_\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, .. n)$$

Multiplicieren wir dieselben der Reihe nach mit $\frac{\partial x_\lambda}{\partial \xi_\nu}$ $(\lambda = 1, 2, .. n)$ und addiren dieselben dann, so wird, da

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial \vartheta_\varrho}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x_\lambda}{\partial \xi_\nu} = \frac{\partial \vartheta_\varrho}{\partial \xi_\nu}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x_\lambda}{\partial \xi_\nu} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_\nu}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda \frac{\partial x_\lambda}{\partial \xi_\nu} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi_\nu}\sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda^2$$

ist, die folgende Gleichung entstehen:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_\nu} - \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}\sum x_\lambda^2 + \sum_{\varrho=1}^{m}\varepsilon_\varrho\frac{\partial\vartheta_\varrho}{\partial\xi_\nu} = 0.$$

Substituirt man jetzt in diese Gleichung die Ausdrücke 27), so fällt das letzte Glied weg, da die ϑ_ϱ ausgedrückt in den ξ identisch verschwinden, und man erhält die Gleichung:

$$28)\quad \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\xi_\nu} - \varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial\xi_\nu} = 0.$$

Giebt man ν alle Werte von 1 bis $n-m$, so erhält man ein System von $n-m$ linearen homogenen Gleichungen, aus denen die noch übrigen Grössen $\xi_1, \xi_2, .. \xi_{n-m}$ zu eliminiren sind; das Resultat dieser Elimination,

welches eine Gleichung für ε ist, muss mit der Gleichung 20) übereinstimmen. Die Gleichungen 28) ($\nu = 1, 2, .. n-m$) sind aber genau ebenso beschaffen, wie die Gleichungen 24); daraus folgt, dass die Wurzeln der Gleichung $\Delta\varepsilon = 0$ sämmtlich reell sind.

Als Lösung der pag. 40 gestellten Aufgabe ergiebt sich daher schliesslich das Resultat:

Damit die homogene Function zweiten Grades

$$\varphi(x_1, x_2, .. x_n) = \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu}\, x_\lambda\, x_\mu$$

für alle Wertsysteme der Grössen $x_1, x_2, .. x_n$ welche die m homogenen linearen Bedingungsgleichungen

$$\vartheta_\varrho = \sum_\mu a_{\varrho\mu}\, x_\mu = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, .. m) \quad m < n$$

befriedigen, beständig positiv sei, ist es notwendig und hinreichend, dass die nach Potenzen von ε entwickelten Form der Gleichung 20), welche nur reelle Wurzeln zulässt, aus $n-m+1$ Gliedern bestehe und nur Zeichenwechsel aufweise. Sie muss dagegen nur Zeichenfolgen haben, wenn die Function φ beständig negativ sein soll.

Hiermit sind denn auch die exacten Bedin-

-gungen dafür, dass eine homogene quadratische Form definit sei, für den Fall abgeleitet, wo die Veränderlichen noch Bedingungsgleichungen genügen sollen. Dieselben setzen sich in durchaus symetrischer Weise aus den Coefficienten der gegebenen Function und der gegebenen Bedingungsgleichungen zusammen.

Zugleich mit dieser Aufgabe ist nun aber auch das Problem aus der Theorie der Maxima und Minima, um welches es sich in diesem Kapitel handelte, endgültig gelöst. Mit Rücksicht auf die pag. 35 und 39 gemachten Bemerkungen können wir nämlich als schliessliches Resultat unserer Untersuchung folgenden Satz aussprechen:

Sollen diejenigen Stellen gefunden werden, an denen eine gegebene Function $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ unter der Bedingung, dass die n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ den m Gleichungen:

a) $f_\lambda(x_1, \ldots x_n) = 0 \qquad \lambda = 1, 2, \ldots m$

genügen, ein Maximum oder Minimum besitzt, so setze man

b) $F + \sum_{\varrho=1}^{m} \varepsilon_\varrho f_\varrho = G(x_1, x_2, \ldots x_n)$

und suche die reellen Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots x_n$, $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_m$, welche die $n+m$ Gleichungen

c) $\frac{\partial G}{\partial x_\lambda} = 0$ $(\lambda = 1, 2, .. n)$

$f_\lambda = 0$ $(\lambda = 1, 2, .. m)$

befriedigen. Ist $a_1\, a_2, .. a_n$ ein solches Wertsystem von $x_1, x_2, ... x_n$, so entwickle man die Differenz $G(a_1 + h_1, .. a_n + h_n) - G(a_1, .. a_n)$ nach Potenzen der h; man erhält dadurch, da in der Entwicklung Glieder erster Dimension der Gleichungen c) zufolge nicht vorkommen können, die folgende Gleichung:

d.) $G(a_1 + h_1, .. a_n + h_n) - G(a_1, .. a_n) = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} G_{\mu\nu}(a_1, .. a_n) h_\mu h_\nu +$

dann sehe man zu, ob die Function

e) $\varphi(h_1, h_2, .. h_n) = \sum G_{\mu\nu} h_\mu h_\nu$

für alle Wertsysteme der h, welche den m Gleichungen

f) $\sum_{\mu=1}^{n} f_{\varrho\mu}(a_1, .. a_n) h_\mu = 0$ $(\varrho = 1, 2, .. m)$

genügen, beständig positiv oder beständig negativ ist, indem man die Determinante

$$\begin{vmatrix} G_{11} - \varepsilon & G_{12} & \cdots & G_{1n}, & f_{11} & \cdots & f_{m1} \\ G_{21} & G_{22} - \varepsilon & \cdots & G_{2n}, & f_{12} & \cdots & f_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G_{n1} & G_{n2} & \cdots & G_{nn} - \varepsilon, & f_{1n} & \cdots & f_{mn} \\ f_{11}, & f_{12} & \cdots & f_{1n}, & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{m1}, & f_{m2} & \cdots & f_{mn}, & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

welche, gleich 0 gesetzt, eine Gleichung $(n-m)^{ten}$ Grades in ε mit lauter reellen Wurzeln darstellt, nach Potenzen von ε entwickelt und nachsieht, ob diese Entwicklung $n-m+1$ Glieder besitzt und resp. lauter Zeichenwechsel oder lauter Zeichenfolgen aufweist. Ist das erstere der Fall, so ist die Function φ beständig positiv und die Function F besitzt an der Stelle $a_1, a_2, .. a_n$ ein Minimum, ist dagegen das letztere der Fall, so ist die Function φ beständig negativ und die Function F besitzt an der Stelle $a_1, a_2, .. a_n$ ein Maximum.

Dieses Criterium versagt jedoch in dem Falle, wo die Function φ identisch verschwindet, weil die $G_{\mu\nu}$ für die Stelle $a_1, a_2, .. a_n$ verschwinden, oder wo die kleinste, resp. grösste Wurzel der Gleichung $\Delta\varepsilon = 0$ selbst gleich 0 ist, denn in diesem Falle können die h immer so gewählt werden, dass auch φ verschwindet, ohne dass die h sämmtlich verschwinden. In beiden Fällen fängt dann aber die Entwicklung d) mit Gliedern der dritten oder einer noch höheren Dimension an und man kann dann aus demselben Grunde, wie pag. 28,

behaupten, dass im Allgemeinen kein Maximum oder Minimum der Function an der Stelle $a_1, a_2 .. a_n$ eintreten wird.

Hiermit ist die allgemeine Theorie der Maxima und Minima gegeben; für die practische Anwendung derselben sei noch Folgendes bemerkt:

Die practische Anwendung der gegebenen Criterien ist in vielen Fällen mit sehr grossen, wenn nicht unüberwindlichen Schwierigkeiten verbunden, die sich jedoch in der Theorie nicht beseitigen lassen. Denn nicht allein, dass sich die verlangte Auflösung der Gleichungen, in vielen Fällen nur schwierig oder gar nicht bewerkstelligen lässt und daher auch die Bildung der Function φ sehr oft unmöglich wird, es wird auch, selbst wenn die Function φ gebildet werden kann, die Untersuchung der Coefficienten von $\Delta\varepsilon = 0$ sehr umständlich und schwierig sein.

Indessen ist die Bildung der Function φ und die Untersuchung der Coefficienten der Gleichung $\Delta\varepsilon = 0$ häufig gar nicht nötig; denn es kommt sehr oft vor, dass man durch Vorbetrachtungen entscheiden

kann, dass ein Maximum resp. Minimum wirklich existirt. Findet sich dann, dass die Gleichungen c) nur ein reelles Wertsystem der x liefern, so sind wir sicher, dass dieses auch wirklich das Maximum resp. Minimum der Function liefert. Ebenso weiss man sicher, dass, wenn man sich von vorn herein überzeugen kann, dass ein Maximum und ein Minimum existirt, und es findet sich, dass die Gleichungen c) nur zwei reelle Wertsysteme der x liefern, das eine dem Maximum, das andere dem Minimum der Function entsprechen muss. Die Entscheidung, welches von beiden Wertsystemen das eine oder das andere liefert, ist dann meistens leicht zu treffen.

Capitel 3.

Beispiele zur Theorie der Maxima und Minima.

Um die Anwendung der im vorigen Capitel gegebenen Criterien zu zeigen, behandeln wir einige Aufgaben aus der Geometrie.

Aufgabe 1.

Es soll die grösste und die kleinste Krümmung einer Fläche $F(x, y, z) = 0$ in einem gegebenen, nicht singulären Punkte, bestimmt werden.

Denkt man sich in einem nicht singulären Punkte P einer ebenen Curve an diese die Tangente gezogen und von einem benachbarten Punkte P' der Curve das Loth $P'Q$ auf die Tangente gefällt, so nennt man bekanntlich den Wert, welchem sich der Quotient $\frac{2\,P'Q}{PP'^2}$ nähert, wenn man P' näher und näher an P heranrücken lässt, die Krümmung der Curve im Punkte P. Ist die Curve ein Kreis mit dem Radius r, so hat jenes Verhältnis

den Wert $\frac{1}{r}$ zur Grenze und ist daher für alle Punkte des Kreises dasselbe. Construirt man nun einen Kreis, welcher die gegebene Curve in den beiden benachbarten Punkten P und P' berührt, so wird der Kreisbogen PP' dem Bogen PP' der Curve um so eher gleich gesetzt werden können je näher P' an P heranrückt, und es wird somit, wenn r der Radius des Kreises ist, die Krümmung der Curve bestimmt sein durch die Formel:

$$1)\quad 2\,\frac{P'Q}{PP'^2} = \frac{1}{r}$$

Die Grösse r nennt man den Krümmungsradius und den Mittelpunkt M. des Kreises, welcher auf der zum Punkte P gehörigen Normale liegt, den Krümmungsmittelpunkt der Curve im Punkte P. Die Krümmung wird positiv oder negativ gerechnet, je nachdem die Strecke P'Q, oder was auf dasselbe hinauskommt, die Strecke MP dieselbe oder entgegengesetzte Richtung hat, wie die als positiv festgesetzte Richtung der Normale.

Ist nun eine Fläche gegeben und in einem nicht singulären Punkte $P=(x, y, z)$ derselben die Normale an sie gezogen, so wird jede durch diese Normale gelegte

Ebene die Fläche in einer Curve schneiden, welche in P eine bestimmte Tangente und eine bestimmte Krümmung in dem oben angegebenen Sinne besitzt. Die Krümmung dieser Curve im Punkte P heisst dann zugleich die Krümmung der Fläche im Punkte P in der Richtung der durch den betreffenden Normalschnitt bestimmten Tangente. Ist $P' = (x', y', z')$ ein dem Punkte P benachbarter Punkt der Fläche, so lässt sich die Gleichung der Letzteren in der Form schreiben:

$$2)\quad 0 = F_1(x'-x) + F_2(y'-y) + F_3(z'-z) + \tfrac{1}{2}\Big\{F_{11}(x'-x)^2 + F_{22}(y'-y)^2 + F_{33}(z'-z)^2 + 2F_{12}(x'-x)(y'-y) + 2F_{23}(y'-y)(z'-z) + 2F_{31}(z'-z)(x'-x)\Big\} + \ldots,$$

worin

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial x},\quad F_2 = \frac{\partial F}{\partial y},\quad F_3 = \frac{\partial F}{\partial z}$$

$$F_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\quad F_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\quad F_{33} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

$$F_{12} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,.\,\partial y},\quad F_{23} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z},\quad F_{31} = \frac{\partial^2 F}{\partial z\,.\,\partial x}$$

gesetzt ist. Die Gleichung der Tangentialebene im Punkte P ist:

$$3)\quad F_1(\xi - x) + F_2(\eta - y) + F_3(\zeta - z) = 0$$

Setzt man daher zur Abkürzung:

$$4)\quad \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = H$$

und nimmt als positive Richtung der Normale

der Fläche im Punkte P diejenige an, für welche H positiv ist, so sind die Richtungscosinus derselben resp.

$$\frac{F_1}{H},\ \frac{F_2}{H},\ \frac{F_3}{H}$$

Mithin ist der Abstand des Punktes P' von der Tangentialebene

$$5)\ P'Q = \frac{F_1}{H}(x'-x) + \frac{F_2}{H}(y'-y) + \frac{F_3}{H}(z'-z),$$

da man bekanntlich den Abstand eines Punktes von einer Ebene findet, wenn man in der linken Seite der auf die Hesse'sche Normalform gebrachten Gleichung $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ der Ebene statt der laufenden Coordinaten die Coordinaten des gegebenen Punktes setzt. Dem Ausdruck auf der rechten Seite ist dabei aber das negative oder positive Vorzeichen zu geben, je nachdem die Strecke P'Q dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung hat wie die als positiv vorausgesetzte Richtung der Normale. Im ersteren Falle wird daher mit Rücksicht auf Gleichung 2), die ja erfüllt sein muss, da der Punkt P' auf der Fläche liegt:

$$6)\ \frac{2\,P'Q}{PP'^2} = \frac{F_{11}(x'-x)^2 + F_{22}(y'-y)^2 + F_{33}(z'-z)^2 + 2F_{12}(x'-x)(y'-y) + \ldots}{H \cdot S^2}$$

Hierin ist:

$$S^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$$

gesetzt. Im Falle, wo die Richtung $P'Q$ der positiven Richtung der Normale entgegengesetzt ist, ist der rechten Seite in 6) das negative Zeichen beizulegen. Lässt man jetzt den Punkt P' näher und näher an P heranrücken, so gehen die Grössen $\frac{x'-x}{s}$, $\frac{y'-y}{s}$, $\frac{z'-z}{s}$, welche die Richtungscosinus der Strecke PP' darstellen, in die Richtungscosinus der Tangente des durch P' bestimmten Normalschnitts im Punkte P über. Werden dieselben resp. mit ξ, η, ζ und der Grenzwert des Verhältnisses $\frac{2\,P'Q}{PP'^2}$ mit K bezeichnet, so ist:

$$7)\quad K = \frac{1}{H}\left\{F_{11}\xi^2 + F_{22}\eta^2 + F_{33}\zeta^2 + 2F_{12}\xi\eta + 2F_{23}\eta\zeta + 2F_{31}\zeta\xi\right\}$$

Darin stellt nun K die Krümmung der Fläche in der durch ξ, η, ζ bestimmten Richtung dar. Dieselbe ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die Richtung der Strecke MP, wo M der Krümmungsmittelpunkt ist, mit der Richtung der positiven Normale zusammenfällt oder nicht. Werden die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes mit x_0, y_0, z_0 und der Krümmungsradius mit r bezeichnet, so ist:

$$x - x_0 = r\,\frac{F_1}{H}$$

oder da $K = \frac{1}{r}$ ist:

$$8)\quad x - x_0 = \frac{F_1}{F_{11}\xi^2 + F_{22}\eta^2 + \dots + 2F_{31}\zeta\xi}$$

$$y - y_0 = \frac{F_2}{F_{11}\xi^2 + F_{22}\eta^2 + \dots + 2F_{31}\zeta\xi}$$

$$z - z_0 = \frac{F_3}{F_{11}\xi^2 + F_{22}\eta^2 + \dots + 2F_{31}\zeta\xi}$$

Da hierin die Grösse K nicht vorkommt, so sieht man, dass die Lage des Krümmungsmittelpunktes unabhängig ist von der Wahl der positiven Richtung der Normale.

Denkt man sich die durch die Richtung ξ, η, ζ bestimmte Normalebene um die Normale herumgedreht, bis sie in sich selbst zurückkehrt, d. h. lässt man ξ, η, ζ in bestimmter Weise variiren, so wird die Function K von ξ, η, ζ andere und andere Werte annehmen und muss, da sie eine reguläre Function ist, für ein bestimmtes Wertsystem ξ, η, ζ ein Maximum, für ein anderes ein Minimum besitzen. Um diese Wertsysteme zu finden haben wir, da der Factor $\frac{1}{H}$ für alle durch dieselbe Normale gelegten Normalschnitte denselben Wert hat, zu untersuchen, für welche Wertsysteme ξ, η, ζ der Ausdruck

$$F_{11}\xi^2 + F_{22}\eta^2 + F_{33}\zeta^2 + 2F_{12}\xi\eta + 2F_{23}\eta\zeta + 2F_{31}\zeta\xi$$

seinen grössten und kleinsten Wert annimmt.

Dabei ist jedoch zu beachten, dass die Veränderlichen den beiden Bedingungsgleichungen

$$9)\quad F_1 \xi + F_2 \eta + F_3 \zeta = 0$$
$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

genügen müssen, von denen die erstere aussagt, dass die durch ξ, η, ζ bestimmte Richtung in der Tangentialebene der Fläche im Punkte P liegen soll, die letztere aber die bekannte Relation zwischen den Richtungscosinus einer Geraden im Raume darstellt. Setzen wir daher

$$10)\quad G = F_{11}\xi^2 + F_{22}\eta^2 + \ldots + 2F_{31}\zeta\xi - \varepsilon(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-1) + 2\varepsilon'(F_1\xi + F_2\eta + F_3\zeta)$$

so haben wir nach pag. 54 c) die Gleichungen

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \zeta} = 0$$
$$F_1 \xi + F_2 \eta + F_3 \zeta = 0$$

aufzustellen und aus denselben $\xi, \eta, \zeta, \varepsilon'$ zu eliminiren. Diese Gleichungen sind hier:

$$(F_{11} - \varepsilon)\xi + F_{12}\eta + F_{13}\zeta + F_1\varepsilon' = 0$$
$$F_{21}\xi + (F_{22} - \varepsilon)\eta + F_{23}\zeta + F_2\varepsilon' = 0$$
$$11.)\quad F_3\xi + F_{32}\eta + (F_{30} - \varepsilon)\zeta + F_3\varepsilon' = 0$$
$$F_1\xi + F_2\eta + F_3\zeta = 0,$$

worin $F_{\lambda\mu} = F_{\mu\lambda}$ ist, und als Eliminationsresultat ergiebt sich:

$$12) \quad \begin{vmatrix} \mathfrak{F}_{11} - \varepsilon & \mathfrak{F}_{12} & \mathfrak{F}_{13} & \mathfrak{F}_1 \\ \mathfrak{F}_{21} & \mathfrak{F}_{22} - \varepsilon & \mathfrak{F}_{23} & \mathfrak{F}_2 \\ \mathfrak{F}_{31} & \mathfrak{F}_{32} & \mathfrak{F}_{33} - \varepsilon & \mathfrak{F}_3 \\ \mathfrak{F}_1 & \mathfrak{F}_2 & \mathfrak{F}_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf ε vom zweiten Grade und liefert somit zwei Werte ε_1 und ε_2, die resp. einem Maximum und einem Minimum zugehören, da wir ja bereits gesehen, dass sowohl das eine als das andere wirklich eintritt. Multiplicirt man die drei ersten Gleichungen 11.) resp. mit ξ, η, ζ und addirt sie, so wird:

$$13.) \quad \mathfrak{F}_{11}\xi^2 + \mathfrak{F}_{22}\eta^2 + \mathfrak{F}_{33}\zeta^2 + 2\mathfrak{F}_{12}\xi\eta + 2\mathfrak{F}_{23}\eta\zeta + 2\mathfrak{F}_{31}\zeta\xi = \varepsilon$$

oder mit Rücksicht auf 7)

$$14.) \quad \mathfrak{K} = \frac{1}{r} = \frac{\varepsilon}{H}$$

Mithin besitzen die Hauptkrümmungen der gegebenen Fläche im Punkte P die Werte:

$$15) \quad \frac{1}{r_1} = \frac{\varepsilon_1}{H}, \qquad \frac{1}{r_2} = \frac{\varepsilon_2}{H}$$

und die Coordinaten der zugehörigen Krümmungsmittelpunkte werden gefunden aus den Formeln

$$16) \quad x - x_{01} = \frac{\mathfrak{F}_1}{\varepsilon_1}, \quad y - y_{01} = \frac{\mathfrak{F}_2}{\varepsilon_1}, \quad z - z_{01} = \frac{\mathfrak{F}_3}{\varepsilon_1}$$

$$x - x_{02} = \frac{\mathfrak{F}_1}{\varepsilon_2}, \quad y - y_{02} = \frac{\mathfrak{F}_2}{\varepsilon_2}, \quad z - z_{02} = \frac{\mathfrak{F}_3}{\varepsilon_2}$$

Setzt man, um ε_1 und ε_2 selbst zu bestimmen

$$\mathfrak{D}_{11} = (\mathfrak{F}_{22} - \varepsilon)(\mathfrak{F}_{33} - \varepsilon) - \mathfrak{F}_{23}^{\,2}$$

$$\mathfrak{D}_{12} = \mathfrak{F}_{23} - \mathfrak{F}_{12} \quad (\mathfrak{F}_{33} - \varepsilon)$$

und bildet man hieraus die entsprechenden Grössen durch cyklische Vertauschung der Indices, so kann man die Gleichung 12) zunächst in der Form schreiben:

$$D^0_{11} F_1^2 + D^0_{22} F_2^2 + D^0_{33} F_3^2 + 2 D^0_{12} F_1 F_2 + 2 D^0_{23} F_2 F_3 + 2 D^0_{31} F_3 F_1 = 0$$

und hieraus entsteht durch Entwicklung nach Potenzen von ε

$$17)\quad H^2 \varepsilon^2 - L \varepsilon + M = 0.$$

worin

$$L = H^2 (F_{11} + F_{22} + F_{33}) - (F_{11} F_1^2 + F_{22} F_2^2 + F_{33} F_3^2 + 2 F_{12} F_1 F_2 + 2 F_{23} F_2 F_3 + 2 F_{31} F_3 F_1)$$

$$M = (F_{22} F_{33} - F_{23}^2) F_1^2 + (F_{33} F_{11} - F_{31}^2) F_2^2 + (F_{11} F_{22} - F_{12}^2) F_3^2$$
$$+ (F_{12} F_{13} - F_{23} F_{11}) + (F_{23} F_{21} - F_{31} F_{22}) F_3 F_1 + (F_{31} F_{32} - F_{12} F_{33}) F_1 F_2$$

gesetzt ist. Hieraus ergeben sich unmittelbar die Werte für die Summe und das Product der Hauptkrümmungen, nämlich mit Berücksichtigung der Gleichungen 15):

$$18)\quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{L}{H^3}$$
$$\frac{1}{r_1 r_2} = \frac{M}{H^4}$$

Hierdurch hat man sowohl die Summe der reciproken Hauptkrümmungsradien, als auch das Krümmungsmass der Fläche im Punkte P unmittelbar durch die Coordinaten dieses Punktes ausgedrückt. Obwohl diese Ausdrücke ziemlich compliciert sind, sind sie doch häufig mit

Vortheil zu verwenden. Bei den Minimalflächen, welche durch die Gleichung $r_1 + r_2 = 0$ characterisirt sind, ist $L = 0$. Dies würde dann die allgemeine Differentialgleichung dieser Art von Fläche sein.

Aufgabe 2.

Von einem gegebenen Punkte (a, b, c) aus soll an eine gegebene Fläche $F(x, y, z) = 0$ eine gerade Linie gezogen werden, deren Länge ein Maximum oder Minimum ist.

Setzt man:

1.) $G = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + 2\lambda F(x, y, z)$,

so sind die Grössen x, y, z, λ nach pag. 57 c) aus folgenden Gleichungen zu berechnen.

$$x - a + \lambda F_1 = 0$$

2, $$y - b + \lambda F_2 = 0$$

$$z - c + \lambda F_3 = 0$$

3, $$F(x, y, z) = 0$$

Da F_1, F_2, F_3 proportional sind den Richtungscosinus der Normale der Fläche im Punkte (x, y, z), so sagen diese Gleichungen aus, dass ~~ihre~~ die durch sie bestimmten Punkte (x, y, z) der Fläche die Eigenschaft besitzen, dass ihre Verbindungslinien mit dem Punkte (a, b, c) normal zur Fläche

stehen. Ist Punkt $P = (x, y, z)$ ein solcher, so hat man, um zu entscheiden, ob nun für diesen die Grösse

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

wirklich ein Maximum oder Minimum ist, zunächst in die Function G statt x, y, z resp. $x+u$, $y+v$, $z+w$, wo u, v, w kleine Grössen sind, zu setzen und die Differenz $G(x+u, y+v, z+w) - G(x, y, z)$ nach Potenzen von u, v, w zu entwickeln. Dabei fallen die Glieder erster Dimension weg, und das Aggregat der Glieder zweiter Dimension ist das folgende:

$$4)\ \Psi = u^2 + v^2 + w^2 + \lambda(F_{11}u^2 + F_{22}v^2 + F_{33}w^2 + 2F_{12}uv + 2F_{23}vw + 2F_{31}wu)$$

Da der Punkt $(x+u, y+v, z+w)$ ebenfalls auf der Fläche liegen muss, so müssen die Grössen u, v, w der Bedingung genügen:

$$5)\ F_1 u + F_2 v + F_3 w = 0,$$

in welcher die eigentlich noch hinzuzufügenden Glieder höherer Dimension aus demselben Grunde wie pag. 39 bereits weggelassen sind. Will man entscheiden, ob die Function Ψ für alle Wertsysteme, welche die Gleichung 5) befriedigen, beständig positiv oder negativ ist, so hat man das Minimum resp. Maximum der Function Ψ

zu suchen unter der Bedingung, dass die Veränderlichen ausser der Gleichung 5, noch der weiteren Beschränkung unterliegen, dass

$$6)\ u^2 + v^2 + w^2 - 1 = 0$$

sei. Man bilde dazu die Function

$$7)\ \Psi - \varepsilon(u^2+v^2+w^2-1) + 2\varepsilon'(F_1 u + F_2 v + F_3 w)$$

und indem man ihre partiellen Ableitungen nach u, v, w gleich 0 setzt, die Gleichungen

$$\left(F_{11} - \frac{\varepsilon - 1}{\lambda}\right) u + F_{12} v + F_{13} w + \frac{\varepsilon'}{\lambda} F_1 = 0$$

$$F_{21} u + \left(F_{22} - \frac{\varepsilon - 1}{\lambda}\right) v + F_{23} w + \frac{\varepsilon'}{\lambda} F_2 = 0$$

$$F_{31} u + F_{32} v + \left(F_{33} - \frac{\varepsilon - 1}{\lambda}\right) w + \frac{\varepsilon'}{\lambda} F_3 = 0$$

und eliminiren aus diesen und aus der Gleichung 5) die Grössen u, v, w $\frac{\varepsilon'}{\lambda}$. Wir haben nun hier genau dasselbe Gleichungssystem, wie in Nr 12, der vorigen Aufgabe, nur dass hier $\frac{\varepsilon - 1}{\lambda}$ und $\frac{\varepsilon'}{\lambda}$ statt ε und ε' stehen. Bezeichnen wir daher die beiden Wurzeln der durch Elimination von u, v, w $\frac{\varepsilon'}{\lambda}$ hervorgehenden quadratischen Gleichung in ε mit ε_1 und ε_2, die zugehörigen Krümmungsradien der Normalschnitte mit r_1 und r_2, so ist, da für unsere Fläche $\frac{\varepsilon - 1}{\lambda}$ dieselbe Bedeutung hat, wie in der vorigen Aufgabe ε

$$9)\ \frac{1}{r_1} = \frac{\varepsilon_1 - 1}{\lambda} \cdot \frac{1}{H}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{\varepsilon_2 - 1}{\lambda} \cdot \frac{1}{H},$$

falls die positive Normale der Fläche bestimmt wird, dass H positiv ist. – Soll an der Stelle (x, y, z) ein Minimum des Abstandes eintreten, so müssen beide ε positiv sein; soll dagegen ein Maximum stattfinden, so müssen ε_1 und ε_2 negativ sein.

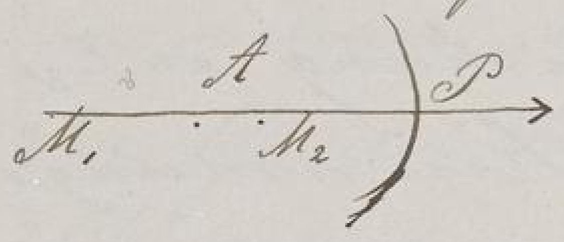
Hiervon lässt sich nun sehr leicht eine geometrische Deutung geben. Es sei PN die positive Richtung der Normale und $A = (a, b, c)$. Dann folgt aus den Gleichungen 2), dass die Strecke von A nach P dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung hat wie PN, je nachdem λ negativ oder positiv. Es ist daher aus 2)

$$AP = -\lambda H$$

Werden die zu r_1 und r_2 gehörigen Krümmungsmittelpunkte mit M_1 und M_2 bezeichnet so ist

$$M_1 P = \frac{\lambda H}{\varepsilon_1 - 1} = -\frac{AP}{\varepsilon_1 - 1}$$

Fig. 1

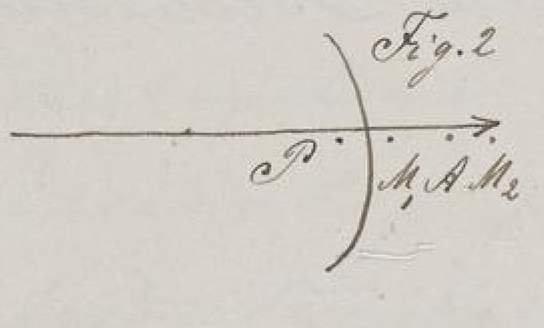


$$M_2 P = \frac{\lambda H}{\varepsilon_2 - 1} = -\frac{AP}{\varepsilon_1 - 1}$$

Hieraus folgt:

$$\varepsilon_1 = \frac{M_1 A}{M_1 P}, \quad \varepsilon_2 = \frac{M_2 A}{M_2 P}$$

Fig. 2



Liegen daher M_1 und M_2 auf derselben Seite von P und liegt A zwi-

schen M_1 und M_2, wie in Fig. 1 und 2, so haben beide ε verschiedene Vorzeichen und es findet somit in diesem Falle weder ein Maximum noch ein Minimum statt.

Fig. 3

Fig. 4

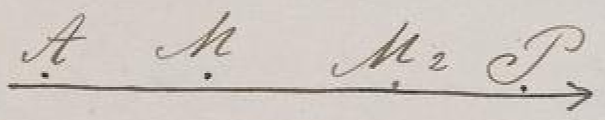
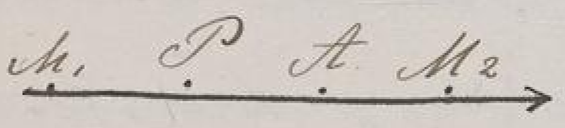


Fig. 5



Liegen M_1 und M_2 auf derselben Seite von P, aber A ausserhalb der Strecke $M_1 M_2$, so wird ein Minimum oder Maximum eintreten, je nachdem der Punkt A von einem der Krümmungsmittelpunkte aus gesehen auf derselben Seite wie P liegt oder nicht. (cfr. Fig. 3 und 4).

Liegen die Punkte M_1 und M_2 auf verschiedenen Seiten des Punktes P und liegt Punkt A innerhalb der Strecke $M_1 M_2$ wie in Fig. 5, so findet stets ein Minimum statt.

Liegt dagegen A ausserhalb der Strecke $M_1 M_2$, so findet weder ein Maximum noch ein Minimum statt.

Fällt aber, wie auch sonst M_1 und M_2 liegen mögen, der Punkt A mit einem dieser Punkte zusammen, so ist eins der beiden ε gleich 0 und es findet dann die allgemeine Bemerkung pag. 56

Anwendung.

Hier kann nun auch der Fall eintreten, auf den bereits pag. 36 hingewiesen wurde, dass sich nämlich bei der Auflösung der Gleichungen 2 und 3, ein singulärer Punkt der Fläche als Punkt P ergiebt, in welchem also $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ wäre. In einem solchen Falle führt der hier eingeschlagene Weg nicht zum Ziele, denn da es in einem solchen Punkte keine Normale an die Fläche giebt, so wird die Entscheidung, ob für denselben ein Maximum oder Minimum wirklich existirt oder nicht, auf diesem Wege nicht getroffen werden können. Wie man in einem solchen Falle etwa verfahren könnte, dazu giebt die allgemeine Bemerkung pag. 36 Anleitung.

Aufgabe 3.

Unter allen Polygonen von gegebener Seitenanzahl und von gegebenem Umfang dasjenige zu finden, welches den grössten Flächeninhalt besitzt.

Man wird sofort erkennen, dass dieses Problem etwas anderer Natur ist, als die früheren

da hier der Pag. 4 aufgestellte und in den allgemeinen Erörterungen durchaus festgehaltene Begriff des Maximums einer gewissen Function nicht mehr zutrifft. Denn, wenn derselbe pag. 4 so aufgestellt wurde, dass die Function an der Stelle $a_1 .. a_n$ ein Maximum ihres Wertes besitzen solle, wenn derselbe an dieser Stelle grösser ist, als an allen benachbarten Stellen, so würde in diesem Sinne unser Polygon sicher kein Maximum des Inhalts haben, denn hätte man ein solches Polygon an irgend einem Orte, so könnte man dasselbe beliebig verschieben, ohne dass sich seine Gestalt und somit sein Flächeninhalt zu ändern brauchte. Es kann also nur ein Maximum des Flächeninhalts in dem Sinne stattfinden, dass bei keiner unendlich kleinen Verschiebung der Eckpunkte, bei welcher der Umfang derselbe bleibt, eine Vergrösserung des ersteren eintreten darf. Wir können daher nicht ohne weiteres unsere allgemeine Theorie hierauf anwenden. Doch kann man diesem Übelstande bis zu einem gewissen Grade abhelfen. Offenbar können wir nur deshalb nicht das Polygon als Function seiner

Eckpunktscoordinaten auffassen, weil zu viele Veränderliche vorhanden sind; würde man aber z. B. festsetzen, dass der eine Eckpunkt mit dem Coordinatenanfangspunkt und die Richtung der einen von ihm ausgehenden Seite mit der positiven x-Achse zusammenfallen solle, so würde das Polygon auch seiner Lage nach völlig bestimmt sein. Da jedoch etwas Aehnliches noch in manchen anderen Fällen wiederkehrt, so erscheint es zweckmässiger, die früheren Sätze entsprechend zu ergänzen.

Die notwendige Bedingung für die Existenz eines Maximums oder Minimums, nämlich das Verschwinden der ersten Ableitungen muss auch hier erfüllt sein, wo es sich um die Beantwortung der Frage handelt: Für welche Wertsysteme der $x_1, \ldots x_n$ ist die Function $f(x_1, \ldots x_n)$ so beschaffen, dass sie für kein benachbartes einen grösseren resp. kleineren Wert erhält, während sie für benachbarte Wertsysteme sehr wohl einen ebenso grossen resp. ebenso kleinen Wert erhalten kann? Dann wären in:

$$f(a_1 + h_1, \ldots a_n + h_n) - f(a_1, \ldots a_n) = \sum f_\mu h_\mu + \ldots$$

die Grössen $f_1, \ldots f_n$ nicht sämmtlich gleich 0, so

würde man die Differenz bei richtiger Wahl von $h_1, .. h_n$ sowohl positiv als negativ machen also die Function sowohl vergrössern, als verkleinern können.

Zu genau denselben Bedingungen, wie früher, kommt man auch in dem Falle, wo die Veränderlichen $x_1, x_2, .. x_n$ noch irgend welchen Bedingungsgleichungen genügen sollen. Es werden daher die Wertsysteme der $x_1 .. x_n$ aus genau denselben Gleichungen bestimmt, wie früher, nur dass es, wenn man ein den Bedingungen der Aufgabe genügendes Wertsystem gefunden hat, in der Nähe desselben immer noch unendlich viele giebt, welche dieselben Bedingungen erfüllen. Die letzteren sind dann dadurch characterisirt, dass für sie die Differenz $f(a_1+h_1, .. a_n+h_n) - f(a_1, .. a_n)$ verschwindet. Aber gerade diese Bedingung ist es, welche die früheren Criterien, vermittelst deren entschieden werden soll, ob an einer durch die sich für $x_1, .. x_n$, $\varepsilon_1, .. \varepsilon_m$ ergebenden Gleichungen bestimmten Stelle $a_1, .. a_n$ nun wirklich ein Maximum oder Minimum eintritt oder nicht, für diesen Fall ganz unmöglich macht. Man muss sich dann vielmehr

auf irgend eine Weise zu überzeugen suchen, dass das eine oder das andere der Fall ist. Wir werden dies weiter unten an der vorliegenden Aufgabe näher ausführen.

Die Coordinaten der n Eckpunkte des Polygons, genommen in einer bestimmten Reihenfolge seien $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots x_n, y_n$. – Der doppelte Flächeninhalt eines Dreiecks, dessen einer Eckpunkt der Coordinatenanfangspunkt ist und dessen beide anderen Ecken die Coordinaten $x_1, y_1; x_2, y_2$ besitzen, wird bis auf das Vorzeichen bestimmt durch den Ausdruck

$$x_1 y_2 - x_2 y_1$$

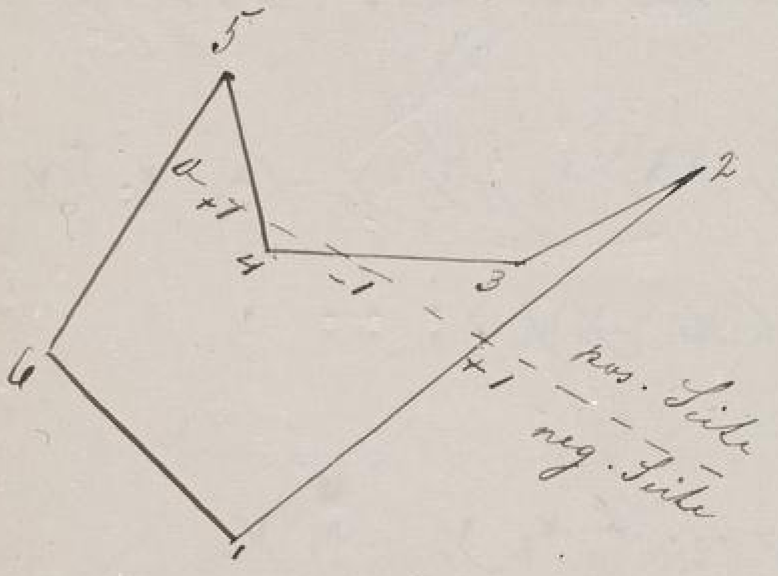
Um über das Vorzeichen dieses Ausdruckes zu entscheiden, denke man sich das zu Grunde gelegte Coordinatensystem durch Drehung um seinen Anfangspunkt in eine solche Lage gebracht, dass die positive x-Achse mit der Strecke 0 1 zusammenfällt. Man nennt alsdann diejenige Seite der Strecke 0 1, nach welcher die positive y-Achse zu liegen kommt, die positive Seite der Strecke 0 1 und es ist der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks 0 1 2 positiv oder negativ zu rechnen, je nachdem dasselbe auf

der positiven oder negativen Seite der Strecke 01 liegt. Besitzt der Punkt 0 selbst die Coordinaten x_0, y_0, so ist der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks

$$2\Delta_{012} = (x_1-x_0)(y_2-y_0)-(y_1-y_0)(x_2-x_0),$$

wobei betreffs des Vorzeichens dasselbe Criterium anzuwenden ist. Für das Polygon werde nun eine bestimmte Aufeinanderfolge $(1, 2, \dots n)$ der Ecken festgesetzt und ausserdem angenommen, dass keine zwei Seiten sich durchkreuzen. Letztere Annahme ist gerechtfertigt, da man sich leicht überzeugt, dass wenn zwei Seiten des Polygons sich durchschneiden, man sofort ein Polygon angeben kann, dessen Seiten sich nicht durchkreuzen und welches bei gleichem Umfang wie das erstere eine grössere Fläche einschliesst.

Im Inneren des Polygons nehme man einen Punkt $0 = (x_0, y_0)$ beliebig an und ziehe von ihm aus nach irgend einer Richtung eine gerade Linie ins Unendliche. Diese Linie schneidet stets eine ungerade Anzahl von Seiten des Polygons. Verfolgt man nun den Umfang



des Polygons in dem festgesetzten Sinne $1, 2, \ldots n, 1$ und markirt man den Schnittpunkt einer Seite mit jener Linie mit $+1$ oder -1, je nachdem der Übergang von der negativen nach der positiven Seite jener Linie geschieht oder umgekehrt, so ergiebt sich als Summe dieser Marken entweder $+1$ oder -1. Im ersteren Falle sagen wir, das Polygon sei im positiven, im letzteren es sei im negativen Sinne beschrieben. Dabei muss bewiesen werden (welchen Beweis man etwa in Almona, Elemente des graphischen Calcüls übersetzt von Curtze nachsehen möge) dass, wie man auch den Punkt o im Inneren des Polygons wählen und nach welcher Richtung hin man jene Gerade auch ziehen möge, sich immer dieselbe characteristische Zahl $+1$ oder -1 herausstellt, falls in jedem Falle die positive Seite jener geraden richtig bestimmt ist.

Dem doppelten Flächeninhalt des Polygons

$$2F = (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0) + (x_2 - x_0)(y_3 - y_0) - (x_3 - x_0)(y_2 - y_0) + \ldots$$

$$+ (x_n - x_0)(y_1 - y_0) - (x_1 - x_0)(y_n - y_0)$$

oder

$$1) \quad 2F = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + \ldots + x_n y_1 - x_1 y_n$$

ist daher das positive oder negative Vorzeichen

beizugeben, je nachdem das Polygon im positiven oder negativen Sinne beschrieben ist. Man kann jedoch eventuell durch Umkehrung der Reihenfolge der Ecken stets bewirken, dass der Ausdruck 1) für $2F$ positiv ist. Setzen wir dies als geschehen voraus, so ist die Function $2F$ zu einem Maximum zu machen unter der Bedingung, dass der Umfang einen gegebenen Wert s habe, dass also sei:

2.) $s_{12}+s_{23}+\dots+s_{n-1,n}+s_{n1}=s,$ worin

3.) $s_{\lambda-1,\lambda}=\sqrt{(x_\lambda-x_{\lambda-1})^2+(y_\lambda-y_{\lambda-1})^2}$ ist.

Bilden wir die Function:

4) $G=2F+\varepsilon(s_{12}+s_{23}+\dots+s_{n1}-s)$,

so erhalten wir, wenn wir die partiellen Ableitungen davon gleich 0 setzen

$$\frac{\partial G}{\partial x_\lambda}=y_{\lambda+1}-y_{\lambda-1}+\varepsilon\left(\frac{x_\lambda-x_{\lambda+1}}{s_{\lambda+1,\lambda}}+\frac{x_\lambda-x_{\lambda-1}}{s_{\lambda-1,\lambda}}\right)=0$$

$$\frac{\partial G}{\partial y_\lambda}=x_{\lambda+1}+x_{\lambda-1}+\varepsilon\left(\frac{y_\lambda-y_{\lambda+1}}{s_{\lambda+1,\lambda}}+\frac{y_\lambda-y_{\lambda-1}}{s_{\lambda-1,\lambda}}\right)=0$$

$$(\lambda=1,2,\dots n;\ n+1=1)$$

Nimmt man hierzu noch die Gleichung 2), so hat man $2n+1$ Gleichungen zur Bestimmung von $2n+1$ Unbekannten $x_1,\dots x_n, y_1,\dots y_n, \varepsilon$, wo-

mit jedoch nicht gesagt sein soll, dass letztere durch erstere auch wirklich bestimmt wären. Um aus diesen Gleichungen auf möglichst einfache Weise zum gewünschten Resultat zu kommen, schlagen wir folgenden Weg ein. Setzen wir:

$$6)\quad z_\lambda = x_\lambda - x_{\lambda-1} + i\,(y_\lambda - y_{\lambda-1}),$$

so repräsentirt z_λ, geometrisch dargestellt, die Strecke vom Punkte $\lambda-1$ bis zum Punkte λ der Grösse und Richtung nach. Ist daher:

$$7.)\quad z'_\lambda = x_\lambda - x_{\lambda-1} - i\,(y_\lambda - y_{\lambda-1}),$$

so ist:

$$8.)\quad z_\lambda \cdot z'_\lambda = s^2_{\lambda-1,\lambda}$$

Multiplicirt man nun die erste der Gleichungen 5) mit i und subtrahirt davon die zweite, so wird wegen 6.)

$$z_\lambda + z_{\lambda+1} + \varepsilon i \left(\frac{z_\lambda}{s_{\lambda-1,\lambda}} - \frac{z_{\lambda+1}}{s_{\lambda,\lambda+1}}\right) = 0$$

oder:

$$z_\lambda \left(1 + \frac{\varepsilon i}{s_{\lambda-1,\lambda}}\right) = -z_{\lambda+1}\left(1 - \frac{\varepsilon i}{s_{\lambda,\lambda+1}}\right)$$

und hieraus

$$9)\quad z'_\lambda \left(1 - \frac{\varepsilon i}{s_{\lambda-1,\lambda}}\right) = -z'_{\lambda+1}\left(1 + \frac{\varepsilon i}{s_{\lambda,\lambda+1}}\right)$$

Multiplicirt man nun die letzten beiden Gleichungen und beachtet 8), so kommt:

$$s^2_{\lambda-1,\lambda}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{s^2_{\lambda-1,\lambda}}\right) = s^2_{\lambda,\lambda+1}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{s^2_{\lambda,\lambda+1}}\right)$$

woraus folgt:

$$s^2_{\lambda-1,\lambda} = s^2_{\lambda,\lambda+1}$$

d. h. die Seiten des Polygons sind sämmtlich einander gleich. Es ist daher jede Seite gleich $\frac{s}{n}$ und somit folgt aus 9)

$$\frac{z_{\lambda+1}}{z_\lambda} = \frac{\varepsilon i n + s}{\varepsilon i n - s} = \text{const.}$$

Setzt man daher $z_\lambda = \frac{s}{n} e^{\varphi_\lambda i}$, wo φ_λ den Winkel bedeutet, den $s_{\lambda-1,\lambda}$ mit der x-Achse bildet, so folgt hieraus

$$e^{(\varphi_{\lambda+1} - \varphi_\lambda) i} = \text{const.}$$

oder

$$11)\quad \varphi_{\lambda+1} - \varphi_\lambda = \text{const.}$$

d. h. auch alle Winkel des Polygons sind unter einander gleich. Mithin ist das Polygon ein reguläres.

Hiermit haben wir gezeigt, dass den Bedingungen, welche sich aus dem Verschwinden der ersten Ableitungen der Function 4) ergeben, nur durch ein reguläres Polygon genügt werden kann, d. h. wenn es überhaupt ein Polygon giebt, welches bei gegebenem Umfange und vorgeschriebener Seitenanzahl einen grössten Flächeninhalt besitzt, so ist es not-

wendig regulär. Dass aber dieses Maximum wirklich existirt, darüber haben uns unsere Deductionen keinen Aufschluss gegeben.

Man muss aber gerade in diesem Punkte sehr vorsichtig sein, da es in der That Fälle giebt, in denen man von der Existenz eines Maximums oder Minimums überzeugt sein könnte, während es in Wirklichkeit ein solches nicht giebt.

Um z. B. Euklid's Parallentheorie zu begründen, suchte man den Satz von der Winkelsumme eines Dreiecks, ohne die Parallelentheorie zu Hilfe zu nehmen, zu beweisen. Legendre konnte zwar zeigen, dass dieselbe nicht grösser sein könne, als zwei Rechte, nicht aber, dass sie auch nicht kleiner sein dürfe. Man hätte nun so schliessen können: Wenn in keinem Dreieck die Summe der Winkel grösser sein kann, als 180°, so muss es ein Dreieck geben, für welches das Maximum der Winkelsumme wirklich erreicht ist. Nimmt man dies als richtig an, so lässt sich zeigen, dass in diesem Dreieck die Summe der Winkel gleich

180° und daraus, dass dies überhaupt bei jedem Dreieck der Fall ist. Dass hierbei ein Fehlschluss gemacht worden ist, erkennt man sofort, wenn man auf das sphärische Dreieck, bei welchem die Summe der Winkel nicht ~~kleiner sein~~ kann als zwei Rechte, dieselben Schlüsse anwenden wollte; man würde finden, dass in jedem sphärischen Dreieck die Winkelsumme 180 betrage, was doch nicht der Fall ist. Dieser Fehlschluss besteht aber eben in der Annahme der Existenz eines Maximums resp. Minimums, es braucht eben nicht immer eine obere oder untere Grenze wirklich erreicht zu werden, wenn man ihr auch so nahe kommen kann, als man will. – Deshalb ist auch in unserem Falle die Annahme der Existenz eines wirklichen Maximums nicht ohne weiteres gerechtfertigt. Wir werden jedoch versuchen, diesen Existenzbeweis zu führen. Dazu müssen wir an einige Sätze der Functionstheorie erinnern:

Die Gesammtheit aller Werthsysteme welche n veränderliche Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ annehmen können, heisst das Gebiet dieser Grössen und jedes

einzelne Wertsystem eine Stelle in demselben. Sind diese Grössen unbeschränkt veränderlich, so dass jede derselben von $-\infty$ bis $+\infty$ gehen kann, so nennen wir das Gesammtgebiet eine n-fache Mannigfaltigkeit. So bilden z. B. die Punkte einer geraden Linie in der Ebene eine einfache Mannigfaltigkeit. Sind die Grössen durch Bedingungs-gleichungen mit einander verknüpft, so dass noch m von ihnen als unabhängig veränderlich betrachtet werden können, so nennen wir die Gesammtheit aller Stellen eine m-fache Mannigfaltigkeit oder ein Gebilde m^{ter} Stufe im Gebiete jener n Veränderlichen. — Sind die Grössen $x_1, .. x_n$ von einander unabhängig, so sagen wir eine bestimmte Stelle $a_1, .. a_n$ liege im Innern des Gebietes, wenn nicht nur diese, sondern auch alle (andern) benachbarten dem Gebiete angehören; sie liegt an der Grenze des Gebietes, wenn es in jeder noch so kleinen Umgebung derselben sowohl Stellen giebt, welche dem Gebiete angehören, als auch solche welche dem Gebiete nicht angehören; sie liegt endlich

ausserhalb des definirten Gebietes, wenn es in keiner noch so kleinen Umgebung derselben Stellen giebt, die zu den definirten gehören. Sind die Grössen $x_1, \dots x_n$ m Bedingungsgleichungen unterworfen, so drücke man dieselben durch $n-m$ unabhängige Veränderliche $u_1, u_2, \dots u_{n-m}$ aus; auf diese findet dann dieselbe Definition Anwendung. Nun werden in der Functionstheorie folgende Sätze bewiesen:

1.) Ist eine stetig veränderliche Grösse auf irgend eine Weise definirt, so hat dieselbe eine obere und untere Grenze, d. h. es giebt eine ganz bestimmte Grösse g derart, dass kein Wert der Veränderlichen grösser werden kann als g, wohl aber ein Wert derselben dem g so nahe kommen kann, als man will; ebenso giebt es eine ganz bestimmte Grösse k derart, dass kein Wert der Veränderlichen kleiner ist als k, dass es aber einen Wert der Function giebt, der dem k beliebig nahe kommt.

2.) Sind im Gebiete von n Veränderlichen $x_1, \dots x_n$ Stellen in unendlicher Anzahl auf irgend welche Weise definirt, – dieselben seien mit $x_1', \dots x_n'$ bezeich-

net – und giebt es unter diesen solche, in denen die Grösse x'_n einer festen Grenze a_n beliebig nahe kommen kann, so giebt es im Gebiete der Grössen $x_1, .. x_n$ stets mindestens eine bestimmte Stelle $a_1, .. a_{n-1}, a_n$ von der Art, dass unter den definirten Stellen $x'_1, .. x'_n$ immer solche vorhanden sind, welche dieser Stelle so nahe liegen, als man will, so dass also, wenn δ eine beliebig kleine Grösse bedeutet, $|x'_\lambda - a_\lambda| < \delta$, $(\lambda = 1, 2, .. n)$ ist. Diese Stelle $a_1, .. a_n$ liegt dann entweder im Innern, oder an der Grenze des definirten Gebietes.

Dies vorausgeschickt, denken man sich eine Function $F(x_1, .. x_n)$, welche sich stetig ändert. Das Gebiet der Grössen $x_1, .. x_n$ sei ein beschränktes, so dass es also Wertsysteme giebt, die nicht dazu gehören. Wenn wir dann jedem möglichen Wertsysteme $x_1, .. x_n$ den zugehörigen Functionswert, der mit x_{n+1} bezeichnet werde, zu ordnen, so haben wir im Gebiete von $n+1$ Grössen gewisse Stellen definirt. Für die Grösse x_{n+1} giebt es nun nach dem ersten Satze eine obere Grenze a_{n+1}; mithin muss es nach dem zweiten Satze im Inneren oder an der Grenze des definirten Gebietes eine Stelle $a_1, a_2, .. a_n, a_{n+1}$ geben, derart, dass es in der Nähe derselben sicher Stellen

-giebt, die dem betrachteten Gebiete angehören. Lässt sich nun in dem betreffenden Falle zeigen, dass diese Stelle im Innern des definirten Gebietes liegt, so findet an der Stelle $a_1 \,..\, a_n$ ein wirkliches Maximum der Function statt, dagegen lässt sich nicht auf die Existenz eines solchen schliessen, wenn jene Stelle an der Grenze liegt. – Dies lässt sich nun in vielen Fällen so entscheiden, dass man zeigt, dass, wenn $x_1, \,..\, x_n$ irgend eine Stelle an der Grenze des Gebietes und x_{n+1} den zugehörigen Wert der Function bezeichnet, im Innern des Gebietes sich Stellen vorfinden, für welche der Wert der Function grösser ist, wie für jede Stelle an der Grenze. Dann kann natürlich die Stelle, um welche es sich handelt, nicht an der Grenze liegen, und es ist klar, dass dann der Grenzwert a_{n+1} der Function für eine bestimmte Stelle im Innern wirklich angenommen werden kann, da die Function sich stetig ändert. – Analogisches gilt natürlich für das Minimum.

Fig. 1. Fall des Maximums $f(x_1) < f(a) > f(x_2)$

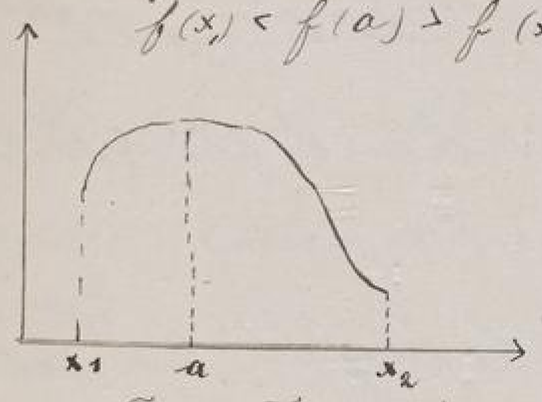
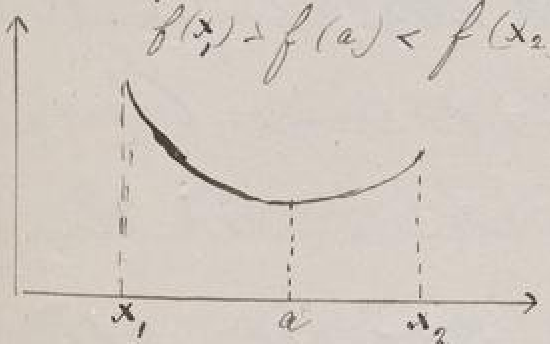


Fig. 2. Fall des Minimums $f(x_1) > f(a) < f(x_2)$



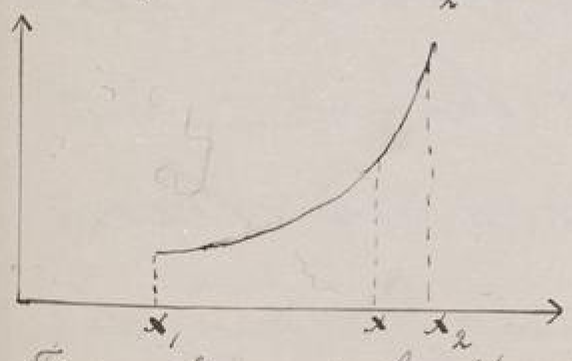
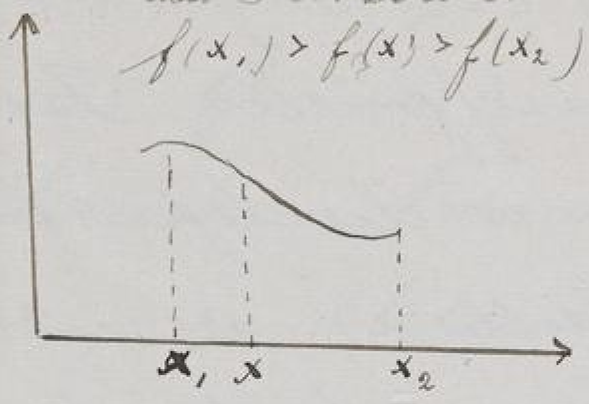


Fig. 3. Asympt. Annäherung $f(x_1) < f(x) < f(x_2)$

Fig. 4. Maximum für die Grenzstelle $f(x_1) > f(x) > f(x_2)$



Lässt sich dagegen nicht nachweisen, dass im Innern des definirten Gebietes es Stellen giebt, für welche der Wert der Function grösser oder kleiner ist, als für alle Stellen an der Grenze, so kann auf die Existenz eines wirklichen Maximums oder Minimums nicht geschlossen werden; es würde dann die Stelle $a_1 .. a_n$ an der Grenze des Gebietes liegen und es könnte eine asymptotische Annäherung an den Grenzwert a_{n+1} stattfinden, ohne dass derselbe wirklich erreicht wird; jedoch braucht dies nicht notwendig der Fall zu sein. Die beigesetzten Figuren geben für den Fall einer Veränderlichen $y = f(x)$, wo x auf ein Intervall $x = x_1$, bis $x = x_2$ beschränkt ist, ein anschauliches Bild des Gesagten.

Was nun unser Beispiel betrifft so ist dadurch, dass die Seitenanzahl und der Umfang des Polygons vorgeschrieben sind, bereits eine Grenze für den Flächeninhalt gegeben, denn denken wir uns ein Quadrat, dessen Seiten grösser als der gegebene Umfang s sind, so können wir jedes Polygon von dem Umfange s in dieses Quadrat hineinlegen und zwar so, dass die

Eckpunkte des Polygons nicht auf die Seiten des Quadrats fallen. Es kann also der Flächeninhalt des Polygons nicht grösser sein als der des Quadrats, und es muss somit eine obere Grenze F_0 für denselben geben, wobei es aber, wohl bemerkt, zunächst noch fraglich bleibt, ob dieselbe auch wirklich für ein bestimmtes Wertsystem erreicht wird. Mit anderen Worten, es muss, wenn wir die Veränderlichen $x_1 y_1 \ldots x_n y_n$ auf dieses Quadrat beschränken, unter den das Quadrat erfüllenden Stellen $x_1 y_1 \ldots x_n, y_n$ eine $a_1, b_1, \ldots a_n, b_n$ geben von der Beschaffenheit, dass in jeder Nähe derselben sich noch andere finden, für welche der zugehörige Flächeninhalt F des von ihnen gebildeten Polygons der oberen Grenze F_0 beliebig nahe kommt. Diese Stelle $a_1, b_1, \ldots a_n, b_n$ können wir nun im Innern des Quadrates annehmen; denn läge sie an der Grenze, so ist es doch nach dem Obigen stets erlaubt, das zugehörige Polygon ohne seine Gestalt und seinen Inhalt zu ändern, in das Innere des Quadrates hineinzuschieben. Wir behaupten nun, dass der Functionswert F für die Stelle $a_1 b_1 \ldots a_n b_n$ notwendig gleich F_0 sein muss. Denn wäre dies nicht der Fall, so würde die Ungleichheit auch bestehen bleiben, wenn man die Punk-

te $a_1 b_1, .. a_n b_n$ unendlich wenig variirte, und es würde somit wegen der Stetigkeit von F nicht möglich sein, in jeder beliebigen Nähe von $a_1 b_1 .. a_n b_n$ Stellen anzugeben, für welche der zugehörige Flächeninhalt der oberen Grenze F_0 beliebig nahe kommt. Dies widerspricht aber der vorhergemachten Schlussfolgerung. Es nähern sich also sämmtliche n-Ecke mit gegebenem Umfang ihrem Inhalte nach nicht nur einer bestimmten Grenze, sondern diese wird auch wirklich erreicht. Da uns nun die notwendigen Bedingungen für das Eintreten eines Maximums das reguläre Polygon von n Seiten als einzige Lösung ergeben haben, und da wir uns ferner überzeugt haben, dass bei unserem Problem ein Maximum wirklich existirt, so können wir jetzt in aller Strenge den Schluss machen: Dasjenige Problem, welches bei vorgeschriebenem Umfange und gegebener Seitenzahl den grössten Flächeninhalt besitzt, ist das reguläre.

II. Haupttheil

Variationsrechnung.

Capitel 4.

Skizzierung der Aufgabe.

Um den Zusammenhang der eigentlichen Variationsrechnung mit der Theorie der Maxima und Minima im engeren Sinne hervortreten zu lassen und zugleich um das Wesen der Variationsrechnung kennen zu lernen, werden wir zuerst einige einfache Probleme derselben formuliren, deren specielle Lösung aber erst später als praktische Erläuterung der abgeleiteten Regeln gegeben werden soll. - Indem wir die gemeinsamen characteristischen Merkmale dieser Probleme aufzusuchen, werden wir dann von selbst zu einer genauen Fixirung der Aufgabe, welche die Variationsrechnung zu lö-

sen hat, gelangen.

I. Man denke sich zunächst in einer Halbebene zwei feste Punkte A und B gegeben. Zwischen diesen soll eine Curve von der Beschaffenheit gezogen werden, dass dieselbe bei einer vollen Umdrehung der Halbebene um ihre Achse eine Fläche von möglichst kleinem Flächeninhalt beschreibt.

Wollte man diese Aufgabe mit den Methoden, welche die Theorie der Maxima und Minima darbietet, zu lösen suchen, so würde man etwa so verfahren müssen:

Man denke sich die zwischen den Punkten A und B zu ziehende Curve zunächst als gebrochene Linie, deren Ecken die Coordinaten $x_1, y_1, \dots x_n, y_n$ besitzen, während die Coordinaten der festen Punkte A und B resp. a_1, b_1 und a_2, b_2 seien. Der Flächeninhalt O, der von dieser gebrochenen Linie erzeugten Rotationsfläche wird dann, da jeder Teil derselben den Mantel eines abgestumpften geraden Kegels beschreibt, durch die Formel ausgedrückt:

$$1.)\quad \frac{O}{\pi} = (b_1+y_1)\sqrt{(x_1-a_1)^2+(y_1-b_1)^2} + (y_1+y_2)\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} + \dots$$
$$+ (y_n+b_n)\sqrt{(a_2-x_n)^2+(b_2-y_n)^2}$$

Soll nun diese Function von den 2n unabhängigen Veränderlichen ein Minimum werden, so müssen die 2n Veränderlichen den 2n Gleichungen genügen, welche man erhält, wenn man die partiellen Ableitungen der Function nach jeder der Veränderlichen gleich 0 setzt. – Die Auflösung dieser Gleichungen jedoch würde wohl unüberwindliche Schwierigkeiten darbieten. Aber gesetzt auch, wir hätten sie gelöst, so müssten wir noch untersuchen, ob wirklich für das gefundene Wurzelsystem ein Minimum eintritt und diese Untersuchung würde noch erschwert werden, wenn etwa mehrere Systeme von Lösungen existirten. Man würde sich dann sowohl begnügen müssen zu sagen, dass, wenn ein Minimum existirt, dasselbe von einem der Wertsysteme geliefert werden muss, welche jenen 2n Gleichungen genügen. Schliesslich hat man dann noch den Grenzübergang von der gebrochenen Linie zur Curve auszuführen, indem man n ohne Ende wachsen lässt. Dabei tritt aber eine neue Schwierigkeit auf, nämlich der Nachweis, dass ein solcher Grenzübergang auch wirklich existirt und statthaft ist und eine Curve von der verlangten

Beschaffenheit liefert. Dass dies nicht überflüssig ist, geht daraus hervor, dass man zwischen zwei Punkten $x_\varkappa, y_\varkappa$ und $x_{\varkappa+1}, y_{\varkappa+1}$ beliebig viele andere einschalten kann wodurch man beliebig viele Gleichungen mit beliebig vielen Unbekannten erhält, ohne dass deshalb die ganze gebrochene Linie in eine stetig gekrümmte überzugehen brauchte.

Hiernach ist es leicht einzusehen, dass die hervorgehobenen Schwierigkeiten auch nicht zu einem kleinen Teile dadurch beseitigt werden können, dass man die Anzahl der Gleichungen auf die Hälfte reduciren kann mittelst der Bemerkung, dass, falls eine der Aufgabe entsprechende Curve existirt, die Ordinate y eine eindeutige Function der Abscisse x sein muss. Wenn nämlich zu einem Werte von x mehrere Werte von y gehörten, so könnte man statt der Curvenstrecke, welche zwischen den zu derselben Abscisse gehörigen Punkten der Curve liegt, die gerade Verbindungsstrecke dieser Punkte nehmen und diese würde eine Fläche von kleinerem Flächeninhalt beschreiben, als die erwähnte Strecke der Curve; es würde somit letztere eine Fläche erzeugen, die kein Minimum

des Flächeninhalt besässe.

Man kann daher, anstatt die Curve in n Teile zu teilen, die Teilung so vornehmen, dass die Projectionen der einzelnen Teilsrecken auf die x-Achse einander gleich sind. Dadurch werden die Grössen $x_1 - a_1$, $x_2 - x_1$, ... $x_n - x_{n-1}$, $a_2 - x_n$ sämmtlich gleich $\frac{a_2 - a_1}{n+1}$, also constant und es werden sich somit jene 2n Gleichungen auf n Gleichungen mit n Unbekannten reduciren. Aber auch hiermit ist noch nichts Wesentliches erreicht, da das Bedenken, ob denn auch durch beständiges Wachsen von n die gebrochene Linie in eine Curve wirklich übergehen müsse, keineswegs erfüllt.

Die ältesten Analysten, die diese Aufgabe behandelten, suchten daher eine Methode anzuwenden, vermöge deren einerseits die notwendigen Bedingungen für das Eintreten eines Minimums sich ergeben sollten und andrerseits zugleich der Übergang zur Grenze für $n = \infty$ bewerkstelligt würde. Sie bedienten sich dazu des folgenden Schlusses:

Angenommen es existire zwischen A und B eine Curve, welche die vorgelegte Aufgabe

löst. Dann muss auch jeder beliebig kleine Teil derselben die Eigenschaft besitzen, eine Fläche von kleinstem Inhalt zu erzeugen. Denn denkt man sich die übrigen Teile der Curve ungeändert, dagegen den betrachteten beliebig kleinen Teil derselben ein wenig verändert, indem man etwa die mittlere Ordinate ein wenig wachsen oder abnehmen lässt, so muss die entstehende Curve eine Fläche von grösserem Flächeninhalt erzeugen als die ursprüngliche Curve. — Wird der variirte Teil der Curve von den Punkten $x-dx, y'$; $x+dx, y''$ begrenzt und ist x, y ein zwischen diesen Punkten gelegener Punkt der Curve, so kann man die Bogen der Curve zwischen den auf einander folgenden Punkten $x-dx, y'$; x, y; $x+dx, y''$ als geradlinig ansehen und es wird daher der Flächeninhalt derjenigen Fläche, welche von dem zu variirenden Teile der Curve erzeugt wird, bestimmt sein durch den Ausdruck

$$\pi\left[(y+y')\sqrt{dx^2+(y-y')^2}+(y+y'')\sqrt{dx^2+(y-y'')^2}\right]$$

Soll dieser ein Minimum sein, so muss eine partielle Ableitung nach y verschwinden oder es muss sein:

$$2)\quad \sqrt{dx^2+(y-y')^2}+\sqrt{dx^2+(y-y'')^2}+\frac{y^2-y'^2}{\sqrt{dx^2+(y-y')^2}}+\frac{y^2-y''^2}{\sqrt{dx^2+(y-y'')^2}}=0$$

Betrachtet man nun y als Function von x, so ist

$$y' = y - \frac{dy}{dx}dx + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}dx^2 - \dots$$

$$y'' = y + \frac{dy}{dx}dx + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}dx^2 + \dots$$

Setzt man dies in die vorstehende Gleichung ein, entwickelt dann nach Potenzen von dx und vernachlässigt die Glieder höherer Ordnung, so erhält man zur Bestimmung von y die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$3)\quad 1 + \frac{dy}{dx}^2 - y\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Wir finden somit dass, wenn überhaupt für eine Curve ein Minimum eintreten soll, dieselbe dieser Differentialgleichung genügen muss. Das allgemeine Integral derselben lässt sich leicht finden. Differentiirt man nämlich nach x, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - y\frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

oder

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{\frac{d}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

d. i.

$$4.)\quad y = c^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

und somit

$$5.)\quad y = C_1 e^{\frac{x}{c}} + C_2 e^{-\frac{x}{c}}.$$

Zwischen der drei Constanten C_1, C_2 und c besteht dabei, wie aus Gleichung 3) sich ergiebt, die Relation

$$c^2 = 4\, C_1\, C_2 .$$

Die Integralgleichung 5) stellt bekanntlich eine Kettenlinie dar.

Auf diese Weise sind wir nun zwar, gestützt auf die Theorie der Maxima und Minima, ohne erhebliche Schwierigkeiten zu einem gewissen Resultat gelangt; aber einerseits musste noch untersucht werden, ob die so erhaltene Curve ein wirkliches Minimum liefert, andrerseits drängt sich in Folge der Art der Behandlung der Aufgabe die Frage auf, ob die Curve nur in einem bestimmten Teile oder in ihrer ganzen Ausdehnung die in der Aufgabe geforderte Eigenschaft besitzt. Dass diese Frage in der That berechtigt ist, wird später deutlicher werden, wo gezeigt wird, dass die gefundene Curve nur zwischen bestimmten Grenzen den gestellten Anforderungen genügt. Eine einfache Überlegung zeigt aber auch, dass das angegebene Verfahren durchaus nicht Anspruch auf Strenge machen kann. Denn es setzt

voraus, was von vornherein nicht statthaft ist, dass die der Aufgabe genügende Curve in ihrem ganzen Verlauf regulär sei, da man sonst nicht den zwischen zwei Punkten $(x-dx, y')$ und (x, y) gelegenen Curvenbogen durch die geradlinige Verbindungsstrecke derselben ersetzen dürfte.

Der characteristische Unterschied zwischen den früher behandelten Aufgaben und der hier vorliegenden besteht also offenbar darin, dass es sich bei den ersteren immer nur um Aufsuchung einer endlichen Anzahl von diskreten Punkten handelte, während bei der letzteren nach einer continuirlichen Reihe von Punkten gefragt wird. Wollten wir an Stelle der Curve zunächst eine polygonale Linie substituiren, und dann auf diese unsere früheren Methoden anwenden, so stellte sich, wenn wir schon eine solche Linie gefunden hätten, die allen Anforderungen genügt, dann noch die Notwendigkeit heraus, den Nachweis zu führen, dass der erforderliche Grenzübergang von dieser polygonalen Linie zur Curve erfolgreich ist, dass er also wirklich eine bestimmte Curve als feste Grenze liefert, welche den Bedingungen der Auf-

gabe entspricht. Wir haben aber den angedeuteten Weg nur gewählt, um das Gemeinsame und Unterscheidende zwischen der gewöhnlichen Theorie der Maxima und Minima und der Variationsrechnung klar zu machen und wollen jetzt die Aufgabe von vornherein ganz anders formuliren:

Jener Grenzübergang ist gleich von selbst gemacht, wenn wir uns des Integralbegriffs bedienen; denn ein Integral stellt ja den Grenzwert einer Summe von Grössen dar, die nach einem bestimmten Gesetze ins Unbegrenzte sich vermehren und dabei entsprechend sich verkleinern. Definiren wir also den Inhalt der von der gesuchten Curve $y=f(x)$ erzeugten Fläche durch

$$O = 2\pi \int y\,ds$$

oder:

$$6)\quad \frac{O}{2\pi} = \int_{a_1}^{a_2} y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx,$$

so wird dieses Integral für jede zwischen den Punkten A und B gezogene Curve einen ganz bestimmten Wert besitzen und es wird somit die gestellte Aufgabe so zu formuliren sein:

Es soll y als Function von x so bestimmt werden, dass das obige Integral einen möglichst kleinen Wert erhält.

Wie diese Aufgabe nun wirklich zu lösen ist, wird später gezeigt werden.

II. Als zweite Aufgabe möge das Problem der Brachistochrone (der Curve des schnellsten Falles) aufgestellt werden. Dasselbe wurde zuerst von Jakob Bernoulli gelöst und lautet:

In einer Verticalebene soll von einem Punkte A zu einem tiefer gelegenen Punkte B eine Curve so gezogen werden, dass ein materieller, der Schwerkraft unterworfener Punkt, der gezwungen ist, sich auf dieser Curve zu bewegen, bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit in möglichst kurzer Zeit vom Punkte A nach dem Punkte B gelange.

Es sei die Masse des schweren Punktes gleich 1, seine Anfangsgeschwindigkeit α, die Fallbeschleunigung $2g$, die Zeit t, die Coordinaten der Punkte A und B resp. 0, 0 und a, b. Die Richtung der positiven y-Achse gebe die Richtung der Schwere an und die positive

x-Achse sei nach der Seite hin gerichtet, auf welcher der Punkt B liegt.

Dann ist nach dem Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4gy + \alpha^2$$

oder

$$dt = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{4gy + \alpha^2}} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}{\sqrt{4gy + \alpha^2}}\, dy$$

mithin die Fallzeit:

$$7)\quad T = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}{\sqrt{4gy + \alpha^2}}\, dy$$

Was die Vorzeichen der Wurzelgrössen in diesem Ausdruck anlangt, so ist leicht zu zeigen, dass dieselben beim Beginn der Bewegung dieselben sein müssen und positiv genommen werden können. Aus mechanischen Gründen folgt nämlich, dass die Curve anfangs wenigstens absteigen muss, denn man könnte, wenn dies nicht der Fall wäre, leicht eine andere construiren, für welche die Fallzeit kleiner wäre. Es wird also beim Beginn der Bewegung jedenfalls y mit wachsendem t zunehmen, also dy anfangs positiv sein. Da ferner $4gy + \alpha^2$ eine stets posi-

tive, niemals verschwindende Grösse ist, so kann man auch $\sqrt{4gy+\alpha^2}$ stets das positive Zeichen beilegen; alsdann muss aber auch $\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ anfangs das positive Vorzeichen besitzen wenn dt, wie es sein muss, einen positiven Zuwachs der Zeit bedeuten soll. Im weiteren Verlauf der Bewegung jedoch könnte es vorkommen, dass dy einmal gleich 0 wird; alsdann geht aber $\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ durch ∞ hindurch, so dass dy und $\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ gleichzeitig ihr Vorzeichen wechseln können, während $\sqrt{4gy+\alpha^2}$ das positive Vorzeichen beibehält.

Unsere Aufgabe wird daher jetzt zu formuliren sein:

Es soll x als Function von y so bestimmt werden, dass das Integral 7) einen möglichst kleinen Wert hat.

Die in der Aufgabe gemachte Annahme, dass B tiefer liegen solle als A, ist offenbar nicht wesentlich, denn lässt man den beweglichen Punkt vom Punkte B nach dem höher gelegenen Punkte A in derselben Weise, wie er gekommen, wieder zurückgehen so wird derselbe den Punkt A auf der gefundenen Curve offenbar schneller erreichen, als auf irgend einer andern.

In den beiden aufgestellten Problemen ist die

eine der Veränderlichen eine eindeutige Function der andern. Dies rührt daher, dass in beiden Fällen das Coordinatensystem entsprechend gewählt werden konnte. Da dies jedoch nicht in allen Fällen möglich ist, so empfiehlt es sich, die Curve durch zwei Gleichungen darzustellen, also x und y als eindeutige Functionen einer beliebigen Grösse t aufzufassen, welche nur die Eigenschaft hat, dass, wenn sie selbst alle Werte zwischen zwei gegebenen Grenzen durchläuft, der zugehörige Punkt x, y die Curve vom Anfangs= bis zum Endpunkt durchläuft und zwar so, dass zu einem grösseren Werte von t ein späterer Punkt der Curve gehört. – Es stellen sich dann die beiden Integrale, welche in den beiden aufgestellten Problemen zu einem Minimum gemacht werden sollen, in der Form dar:

$$8) \quad O = 2\pi \int^{t} y \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$$

$$9) \quad T = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt}{\sqrt{4gy + \alpha^2}},$$

wo wir mit x', y' die Grössen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ bezeichnen.

III. Drittens behandeln wir die Aufgabe: Zwischen zwei auf einer regulären Fläche

gelegenen Punkten soll eine Curve so gezogen werden, dass ihre Länge ein Minimum ist.

Dazu denken wir uns die orthogonalen Coordinaten x, y, z eines Punktes der Fläche dargestellt als eindeutige reguläre Functionen zweier Parameter u u. v. Indem man sich diese als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes der Ebene vorstellt, wird jedem Punkt der Fläche ein bestimmter Punkt der u v-Ebene zugeordnet und diese Punkte erfüllen in ihrer Gesammtheit einen bestimmten Teil der Ebene, welcher als Bild der Fläche angesehen werden kann. Jeder Curve auf der Fläche entspricht eine Curve in diesem Teil der u v-Ebene und umgekehrt.

Denkt man sich ferner u und v als eindeutige Functionen einer Grösse t dargestellt, so entspricht jedem Werte von t ein Punkt der u v-Ebene und daher, falls dieser in dem definirten Gebiete liegt, ein bestimmter Punkt der Fläche. Entsprechen so den beiden festen Punkten auf der Fläche die Werte t_0 und t_1 von t, so ist die Länge irgend einer zwischen den

festen Punkten enthaltenen Curve bestimmt durch das Integral

$$10) \quad L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{P\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2Q\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + R\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt,$$

worin

$$P = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$Q = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right.$$

$$R = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

gesetzt ist, und es wird verlangt u und v als Functionen von t so zu bestimmen, dass dieses Integral ein Minimum ist.

Das Gemeinsame dieser Probleme besteht darin, dass es sich um die Bestimmung zweier Functionen einer Grösse t handelt, derart, dass ein von ihnen abhängiges Integral von der Form:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y')\, dt$$

einen möglichst kleinen Wert erhält. Dabei besitzen t_0 und t_1 feste Werte und $F(x, y, x', y')$ bedeutet eine eindeutige reguläre Function der vier Grössen x, y, x', y' von denen x' und y' als unbeschränkt veränderlich aufgefasst werden müssen, während das Gebiet des Punktes x, y entweder die ganze

Ebene oder auch nur ein continuirlicher Teil derselben sein kann.

Die Bedingung, dass t_0 und t_1 feste Werte besitzen sollen, ist jedoch nicht wesentlich; vielmehr können beide Endpunkte beweglich sein, wie es z. B. bei der dritten Aufgabe der Fall sein würde, wenn wir sie so festgestellt hätten:

Auf einer Fläche sind zwei Curven gegeben. Es soll unter allen zwischen den Punkten der einen Curve und den Punkten der anderen Curve möglichen Curven diejenige gefunden werden, deren Länge am kleinsten ist. (Man pflegt dieselbe den geodätischen Abstand der beiden gegebenen Curven auf der Fläche zu nennen.)

Um aber diese Aufgabe zu lösen, muss man vorher die speciellere auf pag. 105 gelöst haben; denn wenn eine bestimmte Curve die geforderte Minimaleigenschaft besitzt, so muss sie dieselbe offenbar auch beibehalten, wenn ihre Endpunkte als fest betrachtet werden. Dadurch wird zunächst die Natur der Curve festgestellt. Die Variation der Endpunkte liefert dann gewisse specielle Eigenschaften, welche diese Curve besitzen muss. So ist z. B. die kürzeste Linie

zwischen zwei in derselben Ebene liegenden Curven offenbar eine Gerade, die Variation der Endpunkte ergiebt, dass diese auf beiden Curven zugleich senkrecht stehen muss.

IV. Wesentlich verschieden von den bisher besprochenen Aufgaben ist die folgende, auf welche uns das in der Theorie der Maxima und Minima zuletzt behandelte Beispiel hinweist:

Man soll eine geschlossene Curve von gegebenem Umfang so construiren, dass die eingeschlossene Fläche einen möglichst grossen Inhalt habe.

Denkt man sich x und y als solche Functionen von t, $x(t)$, $y(t)$, dass für zwei bestimmte Werte t_0 und t_1 von t die zugehörigen Punkte x, y der Curve zusammenfallen, und dass, während t vom kleineren Werte t_0 zum grösseren t_1 übergeht, (x, y) die Curve im positiven Sinne vollständig durchläuft, dann wird der doppelte Flächeninhalt der Curve ausgedrückt durch

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (xy' - yx')\, dt$$

und der Umfang der Curve ist bestimmt durch

$$I_1 = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$$

Die gestellte Aufgabe ist nun die, x und y als Functionen einer Grösse t so zu bestimmen, dass das von ihnen abhängige Integral J einen möglichst grossen Wert erhält, während gleichzeitig J_1 einen gegebenen festen Wert besitzt.

Diese Art von Aufgaben kommt am häufigsten vor und bietet auch das grössere Interesse; sie erfordern eine wesentlich andere Behandlung als die zuerst erwähnten, worauf später näher eingegangen werden soll.

Diese Beispiele werden genügen, um einen Begriff davon zu geben, welcher Art die in der Variationsrechnung zu lösenden Probleme sind und es wird uns auf Grund derselben möglich sein, die Aufgabe der Variationsrechnung allgemein zu definiren. Dazu müssen wir noch einen fundamentalen Begriff einführen, nämlich den der Variation einer Curve.

Die Variationsrechnung hat von jeher für einen der schwierigsten Teile der Analysis gegolten; mit Unrecht aber sucht man den Grund dafür in der vermeintlichen Unklarheit ihrer Grundbegriffe, besonders des Begriffs der Variation einer Curve, während die sich dabietenden

Schwierigkeiten thatsächlich nach ganz anderer Richtung liegen. In der Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima sagten wir der Wert einer Function sei für ein bestimmtes Wertsystem der Veränderlichen ein Maximum oder Minimum, wenn er für dasselbe grösser bez. kleiner war, als für alle benachbarten Wertsysteme. Wie wir nun dort sprachen von einem benachbarten Wertsystem der Veränderlichen, so reden wir in der eigentlichen Variationsrechnung von den einer gegebenen Curve benachbarten Curven und verlangen, dass ein über die gegebene Curve erstrecktes Integral im Falle eines Maximums grösser, im Falle eines Minimums kleiner sein solle, als für alle benachbarten Curven. Um nun den Begriff einer benachbarten Curve festzustellen, und um die Analogie desselben mit dem Begriff eines benachbarten Wertsystems der Veränderlichen klar hervortreten zu lassen, denke man sich etwa statt der gegebenen Curve zunächst eine gebrochene Linie $A_1, A_2 \ldots A_n$ und verschiebe dieselbe beliebig wenig. Dann wird in der neuen Lage jeder Endpunkt B_x einem bestimmten Endpunkte A_x in der alten

sprechen und überdies wird die neue Lage $B_1 B_2 .. B_n$ beliebig wenig von der alten $A_1 A_2 .. A_n$ verschieden sein, wenn wir festsetzen, dass die Entfernung je zweier entsprechender Punkte $A_k B_k$ kleiner sein soll, als eine beliebig klein angenommene Grösse δ. Lässt man nun die gebrochene Linie $A_1 A_2 .. A_n$ durch Vermehrung der Endpunkte in die gegebene Curve übergehen, so werden die Punkte $B_1 B_2 .. B_n$ ebenfalls eine Curve bilden, welche von der ersteren beliebig wenig verschieden ist und die wir somit der ersteren benachbart nennen können. Wir können daher sagen: Eine Curve heisst einer andern benachbart oder auch durch eine beliebig kleine Variation aus einer andern entstanden, wenn nicht nur jedem Punkte der letzteren ein bestimmter Punkt der ersteren entspricht, sondern auch der Abstand je zweier entsprechender Punkte kleiner ist als eine beliebig klein anzunehmende Grösse δ.

Dieser auf der geometrischen Zuordnung beruhende Begriff einer benachbarten Curve bietet durchaus keine Unklarheiten mehr dar, man könnte sich ja unter unendlich vielen

Möglichkeiten die Zuordnung z. B. so denken, dass, wenn l und l' die Längen beider Curven, s und s' die von den Anfangspunkten aus gerechneten Bögen derselben sind, diejenigen Punkte sich entsprechen sollen, für welche $s : s' = l : l'$ ist. Ebenso leicht begreiflich ist es, dass jeder Veränderung der Curve auch eine Veränderung des Wertes des Integrals $\int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y') dt$ entsprechen, und dass dieselbe beliebig klein sein wird, wenn die zweite Curve der ersteren benachbart ist. Diese Veränderung des Integralwertes muss natürlich beständig positiv sein, wenn das Integral ein Minimum, sie muss beständig negativ sein, wenn das Integral ein Maximum sein soll. Hiernach können wir nun die Aufgabe der Variationsrechnung folgendermassen formuliren:

Es sollen die Grössen x, y als Functionen einer Grösse t so bestimmt werden, dass, wenn wir die durch die Gleichungen $x = x(t)$, $y = y(t)$ definirte Curve beliebig wenig variiren, die daraus hervorgehende Änderung des Integrals

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y') dt$$

beständig positiv ist, wenn ein Minimum, beständig negativ ist, wenn ein Maximum eintreten soll.

Fassen wir die Aufgabe so auf, so haben wir schon eine ganz bestimmte Aufgabe der Variationsrechnung vor uns und es handelt sich darum, strenge Methoden zur Lösung dieser Aufgaben zu finden.

Wie bereits bemerkt, ist es in dem allgemeinen Problem nicht notwendig, dass die Integrationsgrenzen fest sind. Doch nehmen wir dies zunächst immer an. Ferner können die Grössen x und y noch der Bedingung unterworfen sein, dass ein zweites zwischen denselben Grenzen zu nehmendes Integral von ähnlicher Gestalt, wie das obige (12) einen vorgeschriebenen Wert behält. Dadurch werden die möglichen Variationen der Curve beschränkt. Da dieser Fall später besonders behandelt werden soll, so setzen wir zuerst voraus, dass eine solche Bedingung nicht vorhanden sei:

Die Function $F(x, y, x', y')$ denken wir uns als eindeutige reguläre Function von x, y, x', y' und zwar in x, y, entweder

für die ganze Ebene definirt oder für einen zusammenhängenden Teil derselben. $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ müssen dagegen als unbeschränkt veränderlich angesehen werden; denn sie bestimmen die Richtung der Tangente und man soll von einem Punkte x, y nach allen Richtungen fortschreiten können. In der That sind auch in unseren Aufgaben nur Voraussetzungen über x, y und nicht über $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ gemacht.

Dies vorausgeschickt wollen wir eine wichtige Eigenschaft der Function $F(x, y, x', y')$ beweisen. In allen erörterten Aufgaben ist Folgendes zu bemerken: Der Wert des Integrals, welches ein Minimum werden soll, hängt in allen Fällen lediglich von der Gestalt der zu bestimmenden Curve ab, nicht aber von der Art und Weise, wie x und y als Functionen einer Grösse t dargestellt werden können. (Schreiben wir z. B. in der ersten Aufgabe das Integral in der Form $\int_{a_1}^{a_2} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$, so ist t geradezu $= x$ gesetzt, und es ist klar, dass der Wert dieses Integrals derselbe ist, wie in der früheren Form.

Daraus folgt: Setzen wir für t eine beliebige Function einer andern Grösse τ derart, dass den Werten t_0 und t_1 von t die Werte τ_0 und τ_1 von τ entsprechen, und dass die Curve bei wachsendem τ in demselben Sinne durchlaufen wird, wie vorher bei wachsendem t, so muss das Integral, wenn es eben unabhängig sein soll von der Art und Weise, wie x und y durch die Grösse t dargestellt werden, vollständig ungeändert bleiben, d. h. es muss sein:

$$13)\quad \int_{t_0}^{t_1} F\left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) d\tau$$

Die einfachste Function, die man auf diese Weise für t setzen kann, ist $t = \kappa\tau$, wo κ eine beliebige positive Grösse bedeutet. Betrachtet man nun auf der linken Seite der letzten Gleichung x und y als Function von τ, so ist:

$$\int_{t_0}^{t_1} F\left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(x, y, \frac{1}{\kappa}\frac{dx}{d\tau}, \frac{1}{\kappa}\frac{dy}{d\tau}\right) \kappa\, d\tau,$$

mithin:

$$14.)\quad \int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(x, y, \frac{1}{\kappa}\frac{dx}{d\tau}, \frac{1}{\kappa}\frac{dy}{d\tau}\right) \kappa\, d\tau$$

Da diese Gleichung gelten muss für jeden be-

liebigen positiven Wert von k, der übrigens nicht constant zu sein braucht, sondern irgend eine beständig positive Function von τ sein kann, so müssen die zu integrirenden Functionen für jeden positiven Wert von k selbst gleich sein, also:

$$F\left(x\, y\, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = k\, F\left(x, y, \frac{1}{k}\frac{dx}{dt}, \frac{1}{k}\frac{dy}{dt}\right)$$

oder

$$15)\quad F(x, y, kx', ky') = k\, F(x, y, x', y')$$

d.h.: Soll das Integral J nur abhängig sein von der Gestalt der Curve d.h. von dem analytischen Zusammenhang, der zwischen x und y besteht, so muss die Function $F(x, y, x', y')$ in Bezug auf x', y' eine homogene Function ersten Grades sein. Diese Bedingung ist aber dazu auch ausreichend. Denn denkt man sich x und y zuerst als Functionen einer Grösse t und dann als Functionen einer Grösse τ dargestellt, und sind diese Functionen so beschaffen, dass die Curve vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt durchlaufen wird, wenn man t alle Werte von t_0 bis t_1 und τ alle Werte von τ_0 bis τ_1 annehmen lässt; dann kann man, wenn τ zugleich mit t wächst, $\frac{dt}{d\tau} = k$ setzen und es folgt dann, da k eine positive Grösse ist, aus dem Bestehen der Gleichung 15)

die Richtigkeit der Gleichung 14.) und somit auch die von Gleichung 13.)

Die Bedingung, dass $F(x, y, x', y')$ in Bezug auf x' und y' eine homogene Function ersten Grades sein muss, wird gewöhnlich mit andern Worten ausgesprochen. In der That ist sie nichts als anderes als die Integrabilitätsbedingung für F.

Soll nämlich $F(x, y, x', y')\,dt$ ein genaues Differential, also $F(x, y, x', y')\,dt = d\Phi$ sein, so muss:

$$F(x, y, x', y') = \frac{\partial \Phi}{\partial x} x' + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \Phi}{\partial x'} x'' + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} y''$$

identisch bestehen. Da aber in F keine zweiten Differentialquotienten vorkommen, so folgt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y'} = 0,$$

also:

$$F(x, y, x', y') = \frac{\partial \Phi}{\partial x} x' + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y'.$$

Dies heisst aber auch nichts anderes, als dass F eine homogene Function ersten Grades in x', y' sei. In den Beispielen ist dies auch überall der Fall. Wenn die Curve so beschaffen ist, dass (was man von vornherein nicht immer wissen kann) man eine Coordinate als eindeutige Function der anderen ansehen kann, derart, dass z. B. jedem Werte von x zwischen zwei Grenzen x_0 und x_1

nur ein bestimmter Wert von y entspricht, und dass x beständig wächst, während man vom Anfangspunkt der Curve zum Endpunkt übergeht, so kann man für t die Grösse x selbst wählen und daher das Integral in der Form schreiben:

$$16)\ J = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, 1\ \frac{dy}{dx}\right) dx$$

in welcher dasselbe auch gewöhnlich gegeben wird. Diese Darstellung ist jedoch nicht allgemein giltig, denn die obigen hierzu nötigen Voraussetzungen sind nicht immer erfüllt, so z. B. in der vierten Aufgabe, man müsste denn die noch unbekannte Curve in mehrere Teile zerlegen, was auch nicht angemessen erscheint. Dagegen ist eine Darstellung von der angegebenen Beschaffenheit durch eine Grösse t immer möglich; denn man [kann] ja z. B. den vom Anfangspunkt gemessenen Bogen der Curve als Grösse t einführen. – Ausserdem lässt es sich auch bei der Form 16) nicht vermeiden, dass $\frac{dy}{dx}$ und somit F innerhalb der Integrationsgrenzen unendlich gross werde; dagegen lässt sich t im Allgemeinen so wählen, dass dies nicht der Fall ist. Aus diesem Grunde ziehen wir es vor, trotzdem manche

Entwicklungen dabei etwas weitläufiger werden, die Aufgabe der Variationsrechnung in der pag. 113 gegebenen Form darzustellen, zumal der eben erwähnte Übelstand durch grössere Symmetrie aufgewogen wird.

Capitel 5.

Das Verschwinden der ersten Variation.

Wir beginnen nunmehr mit der Aufsuchung der notwendigen Bedingungen für das Eintreten eines Maximums oder Minimums des Integrals

$$1)\ J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y')\, dt$$

Man denke sich die durch $x = x(t), y = y(t)$ definirte Curve dadurch unendlich wenig variirt, dass man an Stelle von x, y setzt $x + \xi, y + \eta$, wo ξ und η eindeutige Functionen von t sind, welche die Eigenschaft haben für $t = t_0$ und $t = t_1$ zu verschwinden und die überdies für jeden Wert von t unterhalb einer beliebig kleinen angenommenen Grösse liegen

Diese letztere Bedingung kann man unter anderem auch nach Lagrange dadurch errei-chen, dass man zunächst zwei willkürliche eindeutige Functionen von t annimmt und diese mit einer beliebig kleinen Grösse k multiplicirt, so dass $\xi = k\,u(t)$, $\eta = k\,v(t)$ ist.

Bezeichnet man die durch Variation der Curve hervorgerufene Aenderung des Integrals mit ΔJ, so ist:

$$2)\quad \Delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ F\left(x+\xi, y+\eta, x'+\frac{d\xi}{dt}, y'+\frac{dy}{dt}\right) - F(x,y,x',y') \right\} dt$$

Wir haben hier schon sowohl über x und y als über ξ und η eine beschränkende Annahme gemacht, nämlich, dass sie differentiirbare Functionen sind. Wir wollen jetzt noch weiter gehen und annehmen, dass die Curve entweder in ihrer ganzen Ausdehnung regulär ist, so dass also $x(t)$ und $y(t)$ für den betrachteten Bereich von t eindeutige und reguläre Functionen von t sind, oder dass die Curve wenigstens aus regulären Stücken zusammengesetzt ist, in welchem Falle wir unsere Untersuchung zunächst auf ein solches reguläres Stück beschränken. Dass wir diese Voraussetzung machen, hat seinen Grund darin, dass anderfalls

die Curve füglich nicht Object einer mathematischen Untersuchung sein könnte, da es keine Methode giebt, um irreguläre Curven ganz allgemein darzustellen. Wenn wir daher mit den Regeln der Differential- und Integralrechnung ausreichen wollen, so müssen wir unsere Betrachtungen zunächst auf solche Functionen erstrecken, auf die sich diese Regeln anwenden lassen, d. h. auf Functionen von der oben angenommenen Beschaffenheit.

Um Missverständnissen vorzubeugen, sei hier gesagt, dass nicht behauptet wird, es läge in der Natur der Aufgabe etwas, woraus man a priori schliessen könnte, dass die gesuchten Curven analytische Curven sein müssen, sondern es wird nur der Grund angegeben, aus welchem man seine Aufmerksamkeit zunächst auf solche Curven zu richten hat. Hat man dann gefunden, dass eine Aufgabe sich durch eine reguläre Curve lösen lässt, so bleibt noch übrig, nachträglich den Beweis zu führen, dass sie die einzige Curve ist, welche den Bedingungen der Aufgabe genügt. So findet man z. B., dass unter den geschlossenen regulären Curven von gegebenem Umfang der Kreis die-

jenige ist, welche die grösste Fläche umschliesst. A priori kann man aber nicht wissen, ob eine reguläre Linie der Aufgabe überhaupt genügt. Allerdings weiss man, dass unter allen Polygonen von gegebener Seitenanzahl und gegebenem Umfang, das reguläre den grössten Flächeninhalt besitzt, und man wird hierdurch zu dem Schlusse geleitet, dass der Kreis, dem sich das Polygon bei wachsender Seitenanzahl nähert, unter allen geschlossenen Curven die gleiche Eigenschaft besitzen wird. Es wird jedoch niemand dies als strengen Beweis anerkennen wollen und in der Tat bedarf es noch besonderer Kunstgriffe, um diese Eigenschaft des Kreises wirklich zu beweisen. Hierdurch haben wir zugleich auf die Schwierigkeit hingewiesen, von der die Variationsrechnung sich auch heute noch nicht vollständig hat befreien lassen. So ist z. B. noch nicht bewiesen, dass von allen Körpern mit gegebener Oberfläche die Kugel das grösste Volumen besitzt. Die Hauptschwierigkeit in der ganzen Analysis besteht eben darin, strenge zu beweisen, dass die für das Bestehen einer gewissen Eigenschaft gefundenen notwen-

digen Bedingungen auch hinreichend sind. Man schliesst bei analytischen Untersuchungen folgendermassen: Wenn die durch die vorgelegte Aufgabe geforderte analytische Grösse existirt, so muss sie gewisse Eigenschaften besitzen. Dies giebt dann die notwendigen Bedingungen für die gesuchten Functionen. Dann muss aber noch umgekehrt gezeigt werden, dass, wenn diese Bedingungen für ein analytisches Gebilde erfüllt sind, dieses wirklich die Forderungen der Aufgabe befriedigt.

Wir setzen daher auch bei unserer Untersuchung voraus, dass die gesuchten Functionen in ihrer ganzen Ausdehnung regulär sind, und suchen die sich aus dem Problem entwickelnden notwendigen Bedingungen. Schliesslich werden wir uns von den Einschränkungen, so weit es möglich ist, befreien und untersuchen, ob auch wirklich die gefundenen Functionen den Bedingungen entsprechen.

Da ξ und η, $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ und $\frac{\partial \eta}{d t}$ als unendlich klein betrachtet werden, so kann man ΔJ in eine Reihe entwickeln, indem man $F(x+\xi, y+\eta, x'+\frac{\partial \xi}{\partial t}, y'+\frac{\partial \eta}{\partial t})$ nach $\xi, \eta, \frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{d t}$ entwickelt. Es wird:

$$3)\ \Delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \xi + \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial x'} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d\eta}{dt} \right) dt + \int_{t_0}^{t_1} \left(\xi, \eta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt} \right)_2 dt + \dots$$

wo $\left(\xi, \eta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}\right)_2$ die Glieder zweiter Dimension bezeichnet.

Das erste Integral rechts nennt man die erste Variation des Integrals 1, und bezeichnet es mit δJ:

$$4)\ \delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \xi + \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial x'} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d\eta}{dt} \right) dt.$$

Setzen wir, um diesen Ausdruck umzuformen, weiter voraus, dass sich $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$ und x', y' stetig ändern, dass also keine plötzliche Änderung in der Richtung der gesuchten Curve stattfindet, so ist:

$$\frac{\partial F}{\partial x'} \frac{d\xi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\xi \frac{\partial F}{\partial x'}\right) - \xi \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'}$$

Benutzen wir dies, so können wir in δJ partiell integriren und erhalten:

$$5)\ \delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'} \right) \xi + \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta \right\} dt + \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x'} + \eta \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{t_0}^{t_1}$$

Ist nun $1+\varepsilon$ eine positive Grösse, so besteht nach pag. 117 Gleichung 15, die Relation:

$$F(x, y, (1+\varepsilon)x', (1+\varepsilon)y') = (1+\varepsilon) F(x, y, x', y')$$

Entwickelt man beiderseits nach Potenzen von ε und setzt die Coefficienten einander gleich, so folgt

$$6)\ \frac{\partial F}{\partial x'} x' + \frac{\partial F}{\partial y'} y' = F(x, y, x', y').$$

Differentiirt man nun diese Gleichung zuerst nach x', dann nach y', was erlaubt ist, da F eine regu-

läre Function ist und x' und y' sich stetig ändern, so wird:

$$7)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\, x' + \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'}\, y' = 0 \\ &\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'}\, x' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\, y' = 0 \end{aligned}$$

und aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} : \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} : \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = y'^2 : -x'y' : x'^2$$

oder wenn F_1 einen Proportionalitätsfactor bezeichnet:

$$8)\quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} &= F_1 y'^2 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} &= F_1 x' y' \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} &= F_1 x'^2 \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann δJ transformirt werden; es ist nämlich nach 6)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial x'}\, x' + \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial y'}\, y'$$

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial x'}\, x' - \frac{\partial^2 F}{\partial y . \partial x'}\, y' - \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\frac{dx'}{dt} - \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'}\frac{dy'}{dt}$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$9)\quad G = \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y . \partial x'} + F_1\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right),$$

so wird mit Rücksicht auf 8)

$$10)\quad \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial F}{\partial x'} = y' G \quad \text{und analog}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial F}{\partial y'} = -x' G;$$

somit wird jetzt δJ nach 5,

$$11)\quad \delta J = \int_{t_0}^{t_1} G(y'\xi - x'\eta)\,dt + \left[\xi\frac{\partial F}{\partial x'} + \eta\frac{\partial F}{\partial y'}\right]_{t_0}^{t_1}$$

Den Grössen ξ und η denken wir uns jetzt die pag. 120 erwähnte Form κu resp κv gegeben, wo u und v eindeutige Functionen von t, und κ eine beliebig klein anzunehmende Constante ist. Dabei sei gleich bemerkt, dass wir hierdurch die Willkürlichkeit der unendlich kleinen Variationen der Curve beschränken, da sich keineswegs alle möglichen Variationen in dieser Form darstellen lassen. Wohl aber wird es unter allen möglichen auch solche geben, welche die obige Form besitzen und da es hier nur auf die Ableitungen der notwendigen Bedingungen für das Eintreten eines Maximums oder Minimums ankommt, so sind derartige Beschränkungen durchaus gerechtfertigt. Die Grössen u und v mögen ferner an den Grenzen verschwinden, so dass also die Endpunkte der Curve als fest zu betrachten sind. Dann ist:

$$12)\quad \delta J = \kappa \int_{t_0}^{t_1} G(y'u - x'v)\,dt$$

und

$$13)\quad \Delta J = \kappa \int_{t_0}^{t_1} G(y'u - x'v)\,dt + \frac{\kappa^2}{2!} J'' + \frac{\kappa^3}{3!} J''' + \dots$$

Soll nun für die Curve $x(t), y(t)$ das vorgelegte Integral 1.) ein Maximum oder Minimum sein, so muss für alle Variationen der Curve ΔJ im ersten Fall negativ, im zweiten positiv sein. Wir folgern daraus, dass δJ, wie wir auch die Grössen u und v wählen mögen, verschwinden müsse. Denn wäre δJ für irgend welche Werte u, v von 0 verschieden, so könnte man κ so klein annehmen, dass die Summe aller späteren Glieder kleiner wäre als das erste. Man könnte somit, da κ nach Belieben positiv oder negativ gewählt werden kann, bewirken, dass für eine variirte Curve $\Delta J > 0$, für die andere $\Delta J < 0$ wäre. Es könnte also für die Curve $x(t); y(t)$ das Integral weder ein Maximum noch ein Minimum sein:

Wir finden also als erste notwendige Bedingung dafür, dass das Integral 1.) ein Maximum oder Minimum sei:

$$14.)\quad \int_{t_0}^{t_1} G(y'u - x'v)\,dt = 0$$

und zwar wie auch u, v gewählt werden mögen, wenn sie nach Voraussetzung eindeutige, stetige Functionen von t sind, die für $t = t_0$ und $t = t_1$ verschwinden. Aus dieser Bedingung folgern wir, dass notwendig längs der ganzen Curve

$$G = 0$$

sein muss und zwar auf Grund des folgenden Hilfssatzes:

„Sind $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ zwei stetige Functionen, von denen die erstere eine gegebene, die letztere eine willkürlich anzunehmende ist und lässt sich zeigen, dass, wie auch $\psi(t)$ angenommen werden möge, stets $\int_{t_0}^{t_1} \varphi(t)\,\psi(t)\,dt = 0$ ist, so muss notwendig $\varphi(t)$ für jeden Wert t zwischen t_0 und t_1 verschwinden."

Ein strenger Beweis dieses Satzes ist von Heine, ein anderer von Du-Bois-Reymond gegeben worden. Wir wollen den ersteren hier anführen.

Da $\psi(t)$ willkürlich gewählt werden kann, so können wir es doch auch so annehmen, dass es stets, d.h. für jeden Wert von t dasselbe Zeichen besitzt wie $\varphi(t)$. Dann ist $\varphi(t)\,\psi(t)$ für jeden Wert

von t eine positive Grösse und es ist unmöglich, dass $\int_{t_0}^{t_1} \varphi(t)\psi(t)\,dt = 0$ sei, wenn nicht für jeden Wert von t die Grösse $\varphi(t)\psi(t)$ verschwindet. Hat man nämlich ein Integral $\int_{t_0}^{t_1} F(t)\,dt$ und nimmt man an, dass $F(t)$ innerhalb der Integrationsgrenzen nirgends negativ, aber auch nicht beständig gleich 0 sei, so muss $\int_{t_0}^{t_1} F(t)\,dt$ notwendig positiv sein. Denn sei $F(t)$ für irgend einen Wert t' zwischen t_0 und t_1, von 0 verschieden, also positiv, so bleibt $F(t)$ wegen seiner vorausgesetzten Stetigkeit auch innerhalb einer gewissen Umgebung $t' - \tau_1 \ldots t' + \tau_2$ positiv und wir können dann schreiben:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t)\,dt = \int_{t_0}^{t'-\tau_1} F(t)\,dt + \int_{t'-\tau_1}^{t'+\tau_2} F(t)\,dt + \int_{t'+\tau_2}^{t_1} F(t)\,dt$$

Das erste und dritte Integral rechter Hand wird sicher nicht negativ, da F es nirgends wird, das zweite aber ist positiv, da F zwischen $t' - \tau_1$ und $t' + \tau_2$ positiv ist; also $\int_{t_0}^{t_1} F(t)\,dt$ ist positiv und von 0 verschieden.

Würde nun in unserem Falle $\varphi(t)$ nicht für jedes t verschwinden, so könnte man demnach $\psi(t)$ immer so annehmen,

dass das Integral $\gtrless 0$ wäre, also muss in der That $\varphi(t)$ für jedes t gleich 0 sein.

Wir zeigen nun noch, dass dieses Resultat auch gilt, wenn die bisher ganz willkürliche Function $\psi(t)$ der Bedingung unterworfen ist an den Grenzen und vielleicht auch an beliebig vielen anderen Stellen zu verschwinden.

Verschwindet $\psi(t)$ z. B. an den Grenzen so setze man:

$$\psi(t) = (t - t_0)(t - t_1)\,\psi_1(t)$$

$$\varphi_1(t) = (t - t_0)(t - t_1)\,\varphi(t)$$

dadurch verwandelt sich das gegebene Integral in $\int_{t_0}^{t_1} \varphi(t)\,\psi_1(t)\,dt$, worin nun $\psi_1(t)$ eine willkürliche und ebenso wie $\varphi_1(t)$ stetige Function von t ist. Also muss jetzt $\varphi_1(t) = 0$ sein und somit $\varphi(t)$ für jeden Wert von t, der von t_0 und t_1 verschieden ist, verschwinden. Dann aber folgt aus der Stetigkeit von $\varphi(t)$, dass es auch an den Grenzen verschwinden muss.

In unserer Gleichung 14) ist nun $y'u - x'v$ eine willkürliche und stetig Function von t, welche für $t = t_0$ und $t = t_1$ verschwindet; und ferner ist nach den über die Curve gemachten Voraussetzungen G eine stetige

Function von t.

Mithin folgt aus dem eben bewiesenen Hilfssatze:

Es muss längs der ganzen Curve notwendig:

$$15) \quad G = 0$$

sein, wenn ein Maximum oder Minimum des Integrals eintreten soll.

Diese Bedingung ist von den Variationen u, v, resp. ξ, η vollkommen unabhängig und stellt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zur Bestimmung der gesuchten Curve dar. Der in G vorkommende Ausdruck $x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}$ hängt zusammen mit der Krümmung der Curve. Es wird somit durch die Gleichung $G = 0$ eine bestimmte Beziehung zwischen der Krümmung der Curve in einem bestimmten Punkte und den Coordinaten und der Richtung der Tangente der Curve in dem betrachteten Punkte festgesetzt. Durch diese Differentialgleichung ist die Curve bis auf zwei Constanten bestimmt, welche ihrerseits durch die gegebenen Grenzbedingungen sich bestimmen.

In Folge der Gleichung 10) ergiebt sich, $G = 0$ die beiden folgenden Gleichungen:

$$16 \quad \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

von denen jede eine Folge der andern ist.

Dieselben sind in vielen Fällen bequemer, besonders dann, wenn F eine der beiden Grössen x, y nicht enthält, da sich dann eine der beiden Gleichungen sofort integriren lässt.

Wir wollen uns nun schon jetzt von einigen beschränkenden Voraussetzungen frei machen. Was zunächst die Wahl von speciellen Variationen der Curve anlangt, so ist klar, dass dadurch die Allgemeinheit der abgeleiteten notwendigen Bedingungen für die Existenz eines Maximums oder Minimums keine Einbusse erleidet. Denn ΔI soll für alle möglichen Variationen beständig > 0, resp. < 0 sein und unter denselben sind auch unsere speciellen Variationen enthalten, so dass die gefundene Bedingung sicher notwendig ist, wie auch die Variationen gewählt werden mögen. Wir haben ferner angenommen, dass die Grössen x', y' d. h. die Rich-

tung der Curve keine plötzlichen Aenderungen erfahren, also die Curve aus einem einzigen regulären Zuge bestehen solle. Diese Voraussetzung lassen wir nun fallen und halten blos fest, dass die Curve aus regulären Stücken zusammengesetzt sei, so dass also die Richtung der Tangente sich nicht an allen Stellen stetig zu ändern braucht. Dann muss jedes dieser Curvenstücke der Differentialgleichung $G = 0$ genügen. Denn besteht z. B. die Curve AB aus zwei solchen Teilen AC und AB, dann befinden sich unter den möglichen Variationen von AB auch die, bei welcher CB unverändert bleibt und nur AC variirt wird. Jetzt hängt die Variation des Integrals nur ab von der Variation der Strecke AC, und man schliesst wie früher dieses Stück der Differenzialgleichung $G = 0$ genügen müsse. Dasselbe gilt von CB, also muss auch jetzt längs der ganzen Curve $G = 0$ sein. Bei einem solchen Übergang von einem regulären Teile zu einem anderen gilt aber noch ein für die Integration von $G = 0$ sehr wichtiger Satz, dessen

Notwendigkeit wir an einem Beispiel erläutern wollen, und auf den wir um so mehr eingehen, als er in den Lehrbüchern fehlt.

Angenommen, es sei (wie im ersten Beispiel) F von x unabhängig und wir ersetzten aus diesem Grunde $G = 0$ durch die Gleichung

$$A, \quad \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'} = 0$$

dann giebt die Integration sofort

$$B, \quad \frac{\partial F}{\partial x'} = \text{const.} \text{ (eine von } t \text{ unabhängige Grösse)}$$

Dann ist gar nicht ausgeschlossen, dass $\frac{\partial F}{\partial x'}$ irgendwo einen Sprung macht, da wir gar nicht wissen, ob diese Function stetig ist, und ob wir also von der Gleichung A, auf die Gleichung B, in dem Sinne übergehen können, dass die Constante überall denselben Wert besitzt. Von vorn herein würde man auch wirklich erwarten, da x', y' zwischen t_0 und t_1 Sprünge machen, dass auch $\frac{\partial F}{\partial x'}$, $\frac{\partial F}{\partial y'}$ unstetig werden, also die Constante in verschiedenen Intervallen einen verschiedenen Wert besitzen würde. Um so wichtiger ist daher der folgende Satz:

Wenn auch x' und y' und damit die Richtung der Curve eine sprungweise Aenderung erleidet, so ändern sich doch stets die Grössen $\frac{\partial F}{\partial x'}$ und $\frac{\partial F}{\partial y'}$ längs der ganzen Curve stetig.

Eine Unstetigkeit könnte nur an einem solchen Übergangspunkte, wo x' und y' einen Sprung machen, stattfinden. Entspricht ein solcher dem Werte t' von t, so nehmen man zu beiden Seiten von t' zwei Punkte τ und τ' so an, dass innerhalb der Strecken $\tau .. t'$ und $t' .. \tau'$ keine Unstetigkeit in der Richtung der Curve mehr vorkommt. Dann ist eine mögliche Variation der Curve auch diejenige, bei welcher $t_0 ... \tau$ und $\tau' ... t_1$ unverändert bleiben und nur die Strecke $\tau .. \tau'$ variirt wird. Dabei bleiben die Punkte τ und τ' fest, während sich t' beliebig verschiebt. Die Variation des Integrals 1) rührt dann nur her von der Variation der Integrale:

$$17)\ \int_{\tau}^{t'} F(x, y, x', y')\, dt + \int_{t'}^{\tau'} F(x, y, x', y')\, dt,$$

auf deren jede man die Entwicklung 13) anwenden kann, da innerhalb der Grenzen

eines jeden dieser Integrale die dazu erforderlichen Bedingungen erfüllt wird. Ebenso wie früher findet man dann, dass die erste Variation dieses Ausdrucks verschwinden muss, so dass wir, da in unserem Falle nicht alle Grenzen des Integrals fest sind, die Gleichung erhalten:

$$0 = \int_{\tau}^{t'} G(y'u - x'v)\,dt + \int_{t'}^{\tau'} G(y'u - x'v)\,dt + \left[\frac{\partial F}{\partial x'}u + \frac{\partial F}{\partial y'}v\right]^{t'} + \left[\frac{\partial F}{\partial x'}u + \frac{\partial F}{\partial y'}v\right]_{t'}^{\tau'}$$

Da aber G, wie wir eben zeigten, längs der ganzen Curve verschwinden muss, so reducirt sich diese Gleichung auf die folgende:

$$18)\quad 0 = \left[\frac{\partial F}{\partial x'}u + \frac{\partial F}{\partial y'}v\right]_{\tau}^{t'} + \left[\frac{\partial F}{\partial x'}u + \frac{\partial F}{\partial y'}v\right]_{t'}^{\tau'}$$

Für τ und τ' verschwinden die Ausdrücke rechter Hand, aber wir wissen nicht, ob nicht etwa jede der beiden Grössen $\frac{\partial F}{\partial x'}$ und $\frac{\partial F}{\partial y'}$ in t' verschiedene Werte erhält, je nachdem wir uns dem Punkte t' von τ oder τ' her nähern. Wir nehmen an, dies sei der Fall und unterscheiden demgemäss:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_{t'}^{-} \quad \text{von} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_{t'}^{+}$$

und ebenso:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{t'}^{-} \quad \text{von} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{t'}^{+}$$

Es ergiebt sich dann die Gleichung:

$$\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^{-}_{t'} - \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^{+}_{t'}\right\} u' + \left\{\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^{-}_{t'} - \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^{+}_{t'}\right\} v' = 0$$

Da aber u' und v' ganz willkürlich sind, so müssen die Glieder dieser Summe einzeln verschwinden. Also:

$$19.)\ \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^{-}_{t'} = \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^{+}_{t'} \text{ und } \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^{-}_{t'} = \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^{+}_{t'}$$

d. h. die Grössen $\frac{\partial F}{\partial x'}$ und $\frac{\partial F}{\partial y'}$ ändern sich auch beim Übergange von einem regulären Curventeil zu einem andern stetig, selbst dann, wenn x' und y' dabei Sprünge machen.

In dem als Beispiel vorausgeschickten speciellen Falle, wo F von x unabhängig ist, folgern wir jetzt sofort, dass die Constante in dem sich ergebenden Integrale der Differentialgleichung, d.h. in der Gleichung B.) überall denselben Wert besitzt.

Überhaupt werden wir, was wichtig ist, den Satz oft dazu benutzen können, um zu beweisen, dass die Richtung der Curve sich nirgends unstetig ändert, dass die Curve also nicht aus mehreren regulären Stücken, sondern aus einem einzigen regulären Zuge besteht.

Wir müssen nun, um die Criterien aufzusuchen, mittelst deren entschieden wer-

den kann, ob die durch die Differentialgleichung $G = o$ bestimmte Curve wirklich ein Maximum oder ein Minimum liefert, die Glieder zweiter Dimension in ΔJ untersuchen. Zunächst soll jedoch in dem folgenden Capitel gezeigt werden, wie die Differentialgleichung $G = o$ für die drei ersten, im vierten Capitel gestellten Aufgaben sich gestaltet und wie dieselbe oder auch die ihr aequivalenten Gleichungen 16.) zu integriren sind.

Capitel 6.

Integration der Differentialgleichung $G = 0$ für die drei ersten Aufgaben des vierten Capitels.

Beispiel 1. Problem der Rotationsfläche von kleinstem Flächeninhalt.

In Gleichung 8.) pag. 105 haben wir als Ausdruck des Inhalts der Fläche, welche durch Rotation der Curve $x(t), y(t)$ um die Achse der Halbebene erzeugt wird, das Integral gefunden

$$1.)\quad O = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} y\sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$$

Daher ist jetzt

$$2.)\quad F = y\sqrt{x'^2 + y'^2}$$

und somit

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{yx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

Aus diesen Werten folgt, dass $\frac{\partial F}{\partial x'}$ und $\frac{\partial F}{\partial y'}$ proportional sind den Richtungscosinus der

Tangente in irgend einem Punkte der Curve $x(t), y(t)$.

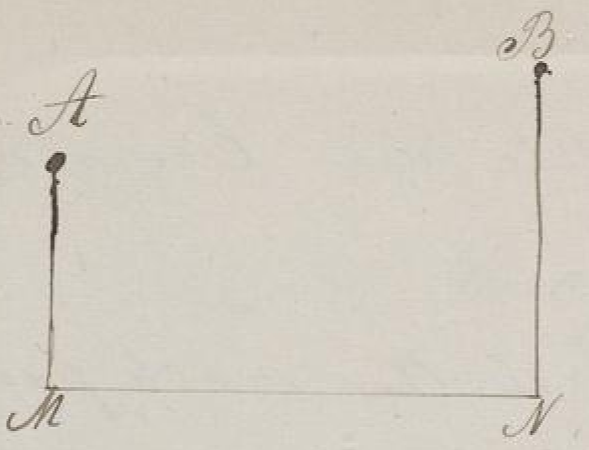
Da sich nun diese Ausdrücke nach pag. 136 überall stetig verändern, so folgt daraus, dass sich auch die Richtung der Curve überall stetig ändern wird, ausgenommen den Fall, wo $y = 0$ werden kann. In letzterem Falle besteht die Curve aus mehreren regulären Zügen, im Allgemeinen aber nur aus einem einzigen. Da F von x unabhängig ist, so benutzt man zweckmässig die Gleichung 16.) pag. 133 statt der Gleichung $G = 0$ selbst. Daher ist die Differentialgleichung für die gesuchte Curve

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{y x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = C,$$

worin C eine willkürliche Constante ist. – Nimmt man für t als unabhängige Veränderliche den Bogen s, so lässt sich die Gleichung auch schreiben:

$$4).\ y\frac{\partial x}{\partial s} = C.$$

Angenommen nun, es wäre $C = 0$, so müsste C diesen Wert auch im ganzen Intervall $t_0 \ldots t_1$ beibehalten, d. h. längs der Curve AB. Da nun in A die Grösse y von Null verschieden ist, so muss $\frac{\partial x}{\partial s} = \cos\alpha = 0$ sein (wo α der Winkel ist, den die Tangente mit der x-Achse



einschliesst) und gleich Null bleiben, bis $y = 0$ wird, d.h. der die Curve beschreibende Punkt muss sich auf der Ordinate von A bewegen bis zum Punkte M, in welchem $\frac{dx}{ds}$ von Null verschieden werden kann und sogar werden muss, wenn der Punkt einmal nach B gelangen soll. Es tritt also in M eine plötzliche Richtungsänderung in der Curve ein. Der Punkt bewegt sich alsdann auf der x-Achse weiter. Um nach B zu gelangen muss er aber die x-Achse wieder verlassen, was nur möglich ist, wenn das Nullwerden von C bedingt wird durch $\frac{dx}{ds} = 0$, d.h. der Punkt bewegt sich auf der Ordinate von B aufwärts. Für den Fall $C = 0$ besteht somit die der Differentialgleichung genügende Curve aus der gebrochenen Linie A M N B. – Ist aber C von 0 verschieden, so ist dies auch in der ganzen Ausdehnung der Curve der Fall. Da nun y anfänglich von 0 verschieden ist, so ist auch $\frac{dx}{ds}$ endlich und von Null verschieden und ändert sich während des ganzen Verlaufs der Curve stetig, folglich muss auch y sich überall stetig ändern und kann nie 0 werden, d.h.

die Curve besteht aus einem einzigen regulären Zuge, welche ganz und gar auf der positiven Seite der x-Achse liegt. –

Aus der Gleichung 4.) folgt nun:

$$y^2 dx^2 = C^2 (dx^2 + dy^2)$$

$$(y^2 - C^2) dx^2 = C^2 dy^2$$

$$5.) \qquad y = C^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$6.) \quad y = C_1 e^{\frac{x}{c}} + C_2 e^{-\frac{x}{c}}$$

Anscheinend kommen hier drei willkürliche Constanten vor; dieselben reduciren sich jedoch, wie schon oben bemerkt, auf zwei, da die Relation

$$C^2 = 4 C_1 C_2$$

zwischen denselben bestehen muss. – Setzen wir:

$$C_1 = \frac{C}{2} e^{-\frac{x_0}{c}}, \quad C_2 = \frac{C}{2} e^{\frac{x_0}{c}},$$

so wird:

$$7) \quad y = \frac{C}{2} \left(e^{\frac{x - x_0}{c}} + e^{\frac{x - x_0}{c}} \right)$$

Die beiden hierin vorkommenden Constanten C und x_0 bestimmen sich durch die Bedingung, dass die Curve durch die festen Punkte A und B gehen soll. Will man x und y als Functionen von t darstellen, so kann man setzen:

$$x = x_0 + Ct$$
$$y = \frac{C}{2}\left(e^{t} + e^{-t}\right),$$

welche Gleichungen eine Kettenlinie darstellen, deren Achse senkrecht zur x-Achse ist. Aus $x = x_0 + Ct$ ist zugleich ersichtlich, in welcher Beziehung die Constante C zur Anfangsrichtung der Curve steht.

Damit ist aber noch nicht bewiesen, dass nun auch wirklich eine durch A und B gehende Kettenlinie die verlangte Eigenschaft hat. Offenbar gehen durch A und B zwei der Differentialgleichung genügende Kettenlinien, von denen die eine ihre convexe, die andere ihre concave Seite der x-Achse zukehrt. Von diesen genügt, wie sich später ergeben wird, nur eine den gestellten Anforderungen und diese nur, wenn der Punkt B nicht jenseits einer gewissen Grenze liegt. Doch können wir hier noch nicht näher darauf eingehen.

Beispiel 2.) Problem der Brachistochrone.

Nach pag. 105 ist die Fallzeit, welche ein

beweglicher Punkt braucht, um von A nach B auf der Curve $x(t)$, $y(t)$ zu gelangen, ausgedrückt durch das Integral:

$$1.)\quad T = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{4gy + \alpha^2}}\,dt$$

Damit dasselbe auch wirklich die Fallzeit ausdrücke, müssen, da hierin t die Zeit, also dt als Zuwachs derselben eine wesentlich positive Grösse ist, die beiden Wurzelgrössen stets einerlei Zeichen haben. Da nun $\sqrt{4gy + \alpha^2}$ stets positiv gewählt werden kann, so muss auch $\sqrt{x'^2 + y'^2}$ innerhalb des Intervalles $t_0 \ldots t_1$ positiv sein. Es könnte jedoch, wenn man x und y durch t ausdrückt vorkommen, dass x' und y' für einen Wert von t innerhalb der Integrationsgrenzen verschwinden. Dann besitzt die Curve in dem zugehörigen Punkte x, y einen singulären Punkt, in welchem die Geschwindigkeit des sich bewegenden Punktes 0 ist. Angenommen, dies sei der Fall für $t = t'$ und der zugehörige Punkt sei x_0, y_0, so würde sein

$$x = x_0 + A(t - t')^m + \ldots$$

$$y = y_0 + B(t - t')^m + \ldots$$

worin $m \geq 2$ und wenigstens eine der Grössen A und B von 0 verschieden ist. Dann wäre

$$x'^2 + y'^2 = m^2 (A^2 + B^2)(t - t')^{2(m-1)} + \ldots$$

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = m \sqrt{A^2 + B^2} (t - t')^{m-1} + \ldots$$

Hierin kann $\sqrt{A^2+B^2}$ positiv vorausgesetzt werden. Ist nun m ungerade, so ist für kleine Werte von $t-t'$ der Ausdruck rechts positiv und somit hat auch $\sqrt{x'^2+y'^2}$ stets das positive Zeichen.

Ist hingegen m gerade, also etwa $m=2$ in welchem Falle die Curve in $x_0 y_0$ einen Rückkehrpunkt besitzt, dann würde $\sqrt{x'^2+y'^2}$ einen positiven oder negativen Wert besitzen, je nachdem $t \gtrless t'$ wäre. Soll daher das Integral die Zeit ausdrücken, so dürfte $\sqrt{x'^2+y'^2}$ nicht stets derselben Potenzreihe von t gleichgesetzt werden, sondern müsste nach dem Überschreiten des Rückkehrpunktes dem entgegengesetzten Werte der Potenzreihe gleichgesetzt werden. Wir beschränken uns daher auf die Betrachtung eines von singulären Punkten freien Stückes der Curve. Derartige Einschränkungen müssen bei Aufgaben oft gemacht

werden, da sonst die Integrale selbst keine bestimmte Bedeutung haben. – Es wird somit bei dieser Voraussetzung $\sqrt{x'^2+y'^2}$ niemals $=0$. In unserem Falle ist jetzt:

$$2.)\quad F = \frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{4gy+\alpha^2}}$$

und somit

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{1}{\sqrt{4gy+\alpha^2}} \cdot \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{4gy+\alpha^2}} \cdot \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

Hieraus ziehen wir einen ähnlichen Schluss, wie in der ersten Aufgabe. Die Grössen $\frac{\partial F}{\partial x'}$ und $\frac{\partial F}{\partial y'}$ sind nämlich, wie man aus diesen Werten erkennt, proportional den Richtungscosinus der Tangente der Curve im Punkte x, y. Da sich nun $\frac{\partial F}{\partial x'}$ und $\frac{\partial F}{\partial y'}$ längs der ganzen Curve stetig ändern, da ferner auch $\sqrt{4gy+\alpha^2}$ stets einen bestimmten von 0 verschiedenen Wert hat, so muss sich auch die Richtung der gesuchten Curve stetig ändern oder die Curve muss aus einem regulären (Punkte) Zuge bestehen. – Auch hier bemerken wir, dass die Function F von x unabhängig ist, mithin muss die gesuchte Curve

der Differentialgleichung genügen:

$$3.)\quad \frac{dF}{dx'} \equiv \frac{1}{\sqrt{4gy+\alpha^2}} \cdot \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = c$$

worin c eine beliebige Constante ist. Wäre $c=0$, so müsste c im Verlauf der ganzen Curve $=0$ sein, es müsste daher auch, da $\sqrt{4gy+\alpha^2}$ beständig von 0 und ∞ verschieden ist, stets $\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=0$ sein, d. h. die ganze gesammte Curve müsste eine Verticallinie sein. Sehen wir von diesem selbstverständlichen Falle ab, so muss c einen bestimmten von 0 verschiedenen und für die ganze Curve gleichen Wert besitzen. – Aus der Gleichung 3.) folgt nun:

$$\partial x^2 = c^2(4gy+\alpha^2)(dx^2+\partial y^2)$$

oder wenn wir $4g$ zur willkürlichen Constanten ziehen und $\frac{\alpha^2}{4g}=a$ setzen:

$$\partial x^2 = c^2(y+a)(dx^2+\partial y^2)$$

$$4.)\quad dx = \frac{c(y+a)\,dy}{\sqrt{(y+a)(1-c^2(y+a))}}$$

Setzen wir, ~~um~~ die Integration auszuführen

$$5.)\quad du = \frac{c\,dy}{\sqrt{(y+a)(1-c^2(y+a))}}$$

so ist:

$$6.)\quad dx = (y+a)\,du$$

In dem Ausdrucke für du setze man:

$$7.)\quad 2c^2(y+a) = 1 - \xi.$$

dann ist:

$$2(1 - c^2(y+a)) = 1 + \xi$$

$$2c^2\,dy = -d\xi$$

$$du = -\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Hieraus folgt:

$$\xi = \cos u.$$

Dabei kann die willkürliche Integrations-constante fortgelassen werden, da u selbst schon vollkommen willkürlich ist. Mithin wird:

$$y + a = \frac{1}{2c^2}(1 - \cos u)$$

$$x + x_0 = \frac{1}{2c^2}(u - \sin u)$$

und diese Gleichungen stellen eine Cykloide dar. Die Integrationsconstanten x_0 und c bestimmen sich aus der Bedingung, dass die Curve durch die beiden Punkte A und B gehen soll. Entwickelt man y und x nach Potenzen von u, so ist in y die niedrigste Potenz u^2 und in x u^3. Es besitzt daher die Curve für $u = 0$ in der That einen Rückkehrpunkt und diese wiederholen sich für $u = 2\pi, 4\pi \ldots$ –

Es müssen daher die Punkte A und B so liegen, dass u einem Intervall $2n\pi \ldots 2(n+1)\pi$ angehört, d. h. die Punkte müssen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Rückkehrpunkten liegen. Die Curve wird construirt, indem man durch den Punkt $-x_0, -a$ eine Horizontale legt und auf der unteren Seite einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2c^2}$, welcher die Horizontale im Punkte $-x_0, -a$ berührt, im Sinne der positiven x auf der Horizontalen fortrollen lässt. Der ursprüngliche Berührungspunkt beschreibt dann eine der Differentialgleichung genügende und durch die Punkte A und B gehende Cykloide. –

Beispiel 3. Problem der kürzesten Linie auf einer Fläche.

Dieses Problem lässt sich allgemein nicht durchführen, da die Separation der Veränderlichen in der sich ergebenden Differentialgleichung nicht gelingt und somit die Integration derselben nicht ausführbar ist. Nur in wenigen Fällen ist es gelungen, diese In

tegration wirklich durchzuführen und somit die Curve, die der Differentialgleichung genügt, durch geschlossene Ausdrücke darzustellen. Dies ist z. B. der Fall bei der Ebene, der Kugel und allen Flächen zweiten Grades überhaupt.

Als einfaches Beispiel soll hier die Aufgabe der kürzesten Linie zwischen zwei Punkten auf der Kugel behandelt werden. –

Es werde der Radius der Kugel gleich 1 gesetzt und die Gleichung der Kugel in der Form gegeben:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Setzt man

1.) $x = \cos u, \; y = \sin u \cos v, \; z = \sin u \sin v,$

so sind u const. und v const. die Gleichungen der Parallelkreise und Meridiane. Das Bogenelement ist

2.) $ds = \sqrt{du^2 + \sin^2 u \, dv^2}$

und daher das zu einem Minimum zu machende Integral:

3) $L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{u'^2 + v'^2 \sin^2 u} \, dt.$

Daher ist hier:

4) $F = \sqrt{u'^2 + v'^2 \sin^2 u}$

5.) $\frac{\partial F}{\partial u'} = \frac{u'}{\sqrt{u'^2 + v'^2 \sin^2 u}}$; $\frac{\partial F}{\partial v'} = \frac{v' \sin^2 u}{\sqrt{u'^2 + v'^2 \sin^2 u}}$

Da F die Grösse v nicht enthält, so erhalten wir, indem wir statt der Gleichung $G = o$ die Gleichung 16. pag. 133 anwenden,

6.) $$\frac{\partial F}{\partial v'} \equiv \frac{v' \sin^2 u}{\sqrt{u'^2 + v'^2 \sin^2 u}} = C$$

worin C eine willkürliche Constante ist, die längs der ganzen Curve denselben Wert besitzt. Ist für den Anfangspunkt A der Curve die Grösse u von o verschieden, also A nicht selbst der Nordpol der Kugel, so wird C nur dann überall gleich o sein, wenn $v' = o$ also $v =$ const. ist. Es müssen alsdann die beiden Punkte A und B auf demselben Meridiane liegen und dieser löst die Aufgabe. Ist jenes aber nicht der Fall, so ist c stets von o verschieden und ist, wie leicht zu sehen, kleiner als 1. Wir können daher $\sin c$ für C setzen und haben dann

$$\frac{v' \sin^2 u}{\sqrt{u'^2 + v'^2 \sin^2 u}} = \sin c$$

oder 7.) $$dv = \frac{\sin c \, du}{\sin u \sqrt{\sin^2 u - \sin^2 c}}$$

und wenn man setzt

$$8.)\quad \cos u = \cos c \cos w$$

so wird

$$dv = \frac{\sin c\, dw}{1-\cos^2 c \cos^2 w}$$

Dies giebt integrirt

$$9.)\quad \cotg (v-\beta) = \sin c . \cotg w,$$

worin β eine willkürliche Constante bedeutet. Eliminirt man hieraus w mittelst der Gleichung 8.) so entsteht

$$10.)\quad \tg u . \cos (v-\beta) = \tg c$$

und dies ist die Gleichung der gesuchten Curve, ausgedrückt in den sphärischen Coordinaten u und v. Um ihre Bedeutung näher kennen zu lernen, stellen wir lieber u und v einzeln durch den Bogen s dar, denselben gerechnet vom Schnittpunkt des Nullmeridians mit der Kürzesten. Mittelst 7.) wird die Gleichung 2.) übergeführt in

$$ds = \frac{\sin u\, du}{\sqrt{\sin^2 u - \sin^2 c}}$$

und diese geht durch die Substitution 8.) über in

$$ds = dw$$

also, wenn b eine neue Constante ist:

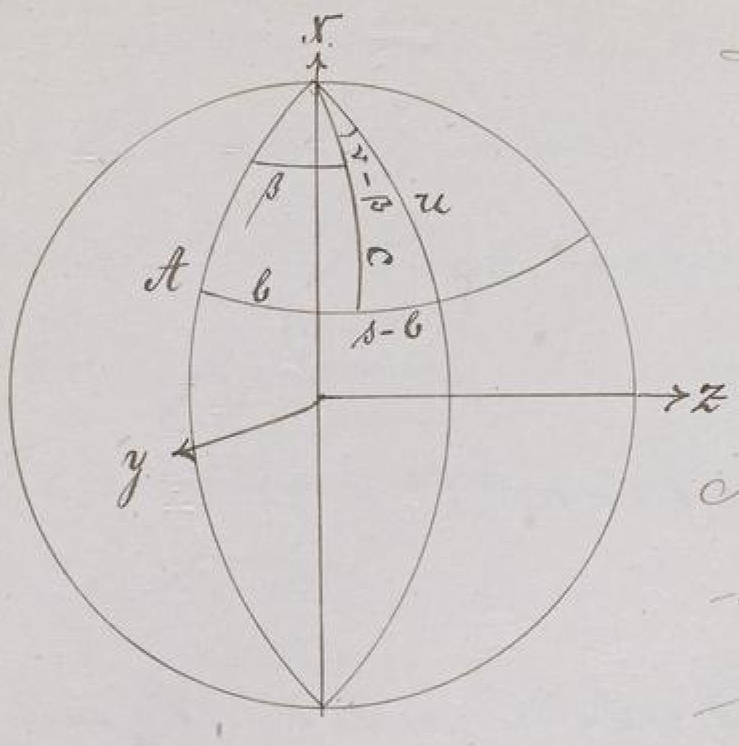
$$11.)\quad s - b = w$$

Folglich ergeben sich aus den Gleichungen 8) und 9) die folgenden

$$\cos u = \cos c . \cos (s - b)$$

$$12) \cot g (v - \beta) = \sin c . \cot g (s - b)$$

Dies sind aber Relationen, wie sie zwischen den Seiten und Winkeln eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks bestehen. Denkt man sich nun vom Nordpol denjenigen Meridian gezogen, welcher die gesuchte Curve senkrecht schneidet, so bildet dieser mit der Curve und irgend einem andern Meridian ein Dreieck, auf welches jene Relationen Anwendung finden; es muss also die der Differentialgleichung genügende Curve selbst der Bogen eines grössten Kreises sein. — Die Integrationsconstanten c, b, β bestimmen sich dadurch, dass die Curve die Punkte A und B gehen soll. Was die geometrische Bedeutung derselben angeht, so ist c die Länge der geodätischen Normalen vom Punkte $u = o$ auf die Kürzeste, $s - b$ der Bogen vom Fusspunkt dieser Normalen bis zu einem beliebigen Punkte der Curve und $v - \beta$ der diesem Bogen gegenüberliegende Winkel, d. h. — der



Längenunterschied der Endpunkte dieses Bogens. Nehmen wir also an, dass der Nullmeridian durch A gehe, und rechnen wir demnach den Bogen vom Punkte A an, so ist b die Bogenlänge der kürzesten Linie vom Punkte A bis zu der Normalen und β die geographische Länge des Fusspunktes dieser Normalen.

Capitel 7.

Über die zweite Variation.

Als erste notwendige Bedingung dafür, dass das Integral

$$1.)\quad I = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y')\, dt,$$

hinerstreckt über eine durch die Gleichungen $x = x(t)$, $y = y(t)$ definirte Curve, ein Maximum oder Minimum sei, ergab sich das Verschwinden der ersten Variation und dieses lieferte als Differentialgleichung für die Curve

$$G = 0$$

Wenn nun aber die dieser Gleichung genügende Curve ein Maximum oder Minimum des Integrals wirklich darbieten soll, so muss, wie man auch die Curve variiren mag, die vollständige Variation ΔI des Integrals 1.) beständig dasselbe Vorzeichen haben und da es bei der Beurteilung dieses Vorzeichens vor Allem auf die Glieder zweiter

Dimension in der Entwicklung von ΔJ ankommt, deren Gesammtheit man als die zweite Variation des Integrals J zu bezeichnen pflegt, so müssen dieselben nun einer eingehenden Betrachtung unterworfen werden.

Wenn man die Function $F(x+\xi, y+\eta, x'+\frac{d\xi}{dt}, y'+\frac{d\eta}{dt})$ nach Potenzen von $\xi, \eta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}$ entwickelt, so erhält man, abgesehen vom Factor $\frac{1}{2}$, als Glieder zweiter Dimension

$$\delta^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\xi^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x.\partial y}\xi\eta + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\eta^2$$
$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x'.\partial y'}\frac{d\xi}{dt}.\frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2$$
$$+ 2\frac{\partial^2 F}{\partial x.\partial x'}\xi\frac{d\xi}{dt} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y.\partial y'}\eta\frac{d\eta}{dt} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x.\partial y'}\xi\frac{d\eta}{dt} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y.\partial x'}\eta\frac{d\xi}{dt}$$

Das Integral über diesen Ausdruck, zwischen den Grenzen t_0 und t_1 genommen, ist gerade die zweite Variation. In dieser Form gestattet der Ausdruck für $\delta^2 F$ es nicht, einen Schluss auf das Vorzeichen der zweiten Variation, die mit $\delta^2 J$ bezeichnet werden möge, zu machen; wir wollen denselben daher umformen und erinnern zu dem Zweck an die pag. 126 Gleichung 8) aufgestellten Definitionen.

$$2.)\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} = y'^2 F_1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = x'^2 F_1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} = -x' y' F_1$$

Führen wir ferner die Bezeichnungen ein:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial x'} - y' \frac{dy'}{dt} F_1 = L$$

$$3.)\quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x . \partial y'} + x' \dfrac{dy'}{dt} F_1 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y} + y' \dfrac{dx'}{dt} F_1 \end{array}\right\} = M$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y . \partial y'} - x' \frac{dx'}{dt} F_1 = N$$

worin sich die Berechtigung dieser gleichzeitigen Definitionen von M unmittelbar aus der Gleichung $G = 0$ ergiebt, so nimmt der Ausdruck $\delta^2 F$ die Gestalt an:

$$\delta^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \xi^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial y} \xi \eta + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \eta^2$$

$$+ F_1 \left\{ y'^2 \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 - 2 x' y' \frac{d\xi}{dt} \frac{d\eta}{dt} + x'^2 \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 \right\}$$

$$+ 2 F \left\{ y' \frac{dy'}{dt} \xi \frac{d\xi}{dt} + x' \frac{dx'}{dt} \eta \frac{d\eta}{dt} - x' \frac{dy'}{dt} \xi \frac{d\eta}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \eta \frac{d\xi}{dt} \right\}$$

$$+ 2 \left\{ L \xi \frac{d\xi}{dt} + M \left(\xi \frac{d\eta}{dt} + \eta \frac{d\xi}{dt} \right) + N \eta \frac{d\eta}{dt} \right\}$$

Auch diese Form lässt sich noch vereinfachen; denn setzen wir:

$$4.)\quad w = \xi y' - \eta x'$$

und

$$5.)\quad R = L \xi^2 + 2 M \xi \eta + N \eta^2 ,$$

so ist:

$$\frac{dw}{dt} = \xi \frac{dy'}{dt} - \eta \frac{dx'}{dt} + y' \frac{d\xi}{dt} - x' \frac{d\eta}{dt}$$

und mithin

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \left(\xi\frac{dy'}{dt} - \eta\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(y'\frac{d\xi}{dt} - x'\frac{d\eta}{dt}\right)^2$$

$$+ 2\left\{y'\frac{dy'}{dt}\xi\frac{d\xi}{dt} + x'\frac{dx'}{dt}\eta\frac{d\eta}{dt} - x'\frac{dy'}{dt}\xi\frac{d\eta}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\eta\frac{d\xi}{dt}\right\}$$

$$\frac{d\mathfrak{R}}{dt} = 2\mathfrak{L}\xi\frac{d\xi}{dt} + 2\mathfrak{M}\left(\xi\frac{d\eta}{dt} + \eta\frac{d\xi}{dt}\right) + 2\mathfrak{N}\eta\frac{d\eta}{dt}$$

$$+ \xi^2\frac{d\mathfrak{L}}{dt} + 2\xi\eta\frac{d\mathfrak{M}}{dt} + \eta^2\frac{d\mathfrak{N}}{dt}$$

So nimmt $\delta^2 F$ die Gestalt an:

$$\delta^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\xi^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial y}\xi\eta + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\eta^2$$

$$+ F_1\left\{\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 - \left(\xi\frac{dy'}{dt} - \eta\frac{dx'}{dt}\right)^2\right\}$$

$$+ \frac{d\mathfrak{R}}{dt} - \left(\xi^2\frac{d\mathfrak{L}}{dt} + 2\xi\eta\frac{d\mathfrak{M}}{dt} + \eta^2\frac{d\mathfrak{N}}{dt}\right)$$

und wenn wir ferner die Grössen einführen:

$$\mathfrak{L}_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - F_1\left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 - \frac{d\mathfrak{L}}{dt}$$

6.) $$\mathfrak{M}_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial y} + F_1\frac{dx'}{dt}\frac{dy'}{dt} - \frac{d\mathfrak{M}}{dt}$$

$$\mathfrak{N}_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - F_1\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 - \frac{d\mathfrak{N}}{dt}$$

so ergiebt sich schliesslich die Gleichung

$$\delta^2 F = \frac{d\mathfrak{R}}{dt} + F_1\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + \mathfrak{L}_1\xi^2 + 2\mathfrak{M}_1\xi\eta + \mathfrak{N}_1\eta^2$$

Von den dreien in 6.) definirten Grössen $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_1$ lässt sich nun nachweisen, dass sie ebenfalls den drei Grössen y'^2, $-x'y'$, x'^2 resp. pro-

portional sind. Es ist nämlich F eine homogene Function ersten Grades in x', y' und genügt somit der Gleichung:

$$F = \frac{\partial F}{\partial x'} \, x' + \frac{\partial F}{\partial y'} \, y'$$

Hieraus folgt nun

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial x'} \, x' + \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial y'} \, y'$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial x'} \, x' - x' y' \frac{\partial y'}{\partial t} F_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial y'} \, y' + x' y' \frac{\partial y'}{\partial t} F_1$$

oder nach 3.):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x' L + y' M$$

In derselben Weise ergiebt sich:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x' M + y' N$$

Durch Differentiation nach t erhält man hieraus:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \, x' \; \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \, y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial x'} \, \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial y'} \, \frac{\partial y'}{\partial t}$$

$$= x' \frac{\partial L}{\partial t} + y' \frac{d M}{d t} + L \frac{\partial x'}{\partial t} + M \frac{\partial y'}{\partial t}$$

oder mit Rücksicht auf die Werte von L u. M:

$$x' \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - F_1 \left(\frac{\partial y'}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial L}{\partial t} \right\} + y' \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial y} + F_1 \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial y'}{\partial t} - \frac{d M}{d t} \right\}$$

d. h. nach 6.)

$$x' L_1 + y' M_1 = 0;$$

analog folgt:

$$x' M_1 + y' N_1 = 0.$$

Daraus ergiebt sich nun sofort die aufgestellte Behauptung:

$$L_1 : M_1 : N_1 = y'^2 : -x'y' : x'^2;$$

aus der mit Einführung eines Proportionalitätsfactors F_2 die folgenden Gleichungen hervorgehen:

$$7.)\quad L_1 = y'^2 F_2,\quad M_1 = -x'y' F_2,\quad N_1 = x'^2 F_2$$

Durch jede dieser Gleichungen wird die Grösse F_2 definirt, welche, wie wir sehen werden, bei der Betrachtung der zweiten Variation gleichfalls eine wesentliche Rolle spielen wird, doch wird es auf ihren besonderen Ausdruck wenig ankommen. Mit Hilfe der Gleichungen 7.) lässt sich nun der Ausdruck

$$L_1 \xi^2 + 2 M_1 \xi \eta + N_1 \eta^2$$

in $F_2 w^2$ umformen und es wird:

$$\delta^2 F = \frac{dR}{dt} + F_1 \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + F_2 w^2$$

Die zweite Variation des Integrals erhält somit die Gestalt:

$$8.)\quad \delta^2 J = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ F_1 \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + F_2 w^2 \right\} dt + \Big[L \xi^2 + 2 M \xi \eta + N \eta^2 \Big]_{t_0}^{t_1}$$

Handelt es sich nun ein Integral mit festen Grenzen, sollen also die beiden Endpunkte der

Curve nicht variirt werden, so verschwindet das zweite Glied rechterseits in 8.) und die zweite Variation reducirt sich auf:

$$8^{a}.)\quad \delta^2 J = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ F_1 \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + F_2 w^2 \right\} dt$$

Dies ist der definitive Ausdruck für die zweite Variation des Integrals J; man hat nun zu untersuchen, ob dieser Ausdruck eines Zeichenwechsels fähig ist, um entscheiden zu können, ob das Integral J ein Maximum oder Minimum ist. Zeigt es sich, dass ein Zeichenwechsel möglich ist, so findet weder ein Maximum noch ein Minimum statt.

Bei der Ableitung der Gleichung 8) oder $8^{a}.)$ sind jedoch stillschweigend einige Voraussetzungen gemacht worden und wir wollen deshalb zunächst zusehen, ob wir uns von denselben, wenigstens teilweise, nicht wieder freimachen können. Die früheren Annahmen dass x, y, ξ, η, x', y' stetig sein sollen, bleiben auch hier bestehen. In Bezug auf die letztere Annahme über die Stetigkeit von x', y' giebt uns in den meisten Fällen der Satz dass nicht $\frac{\partial F}{\partial x'}$ und $\frac{\partial F}{\partial y'}$ für die ganze Curve ste-

tig ändern, ein Mittel an die Hand, um über deren Zulässigkeit zu entscheiden. Ist sie, was sehr wohl möglich ist, in einigen Punkten der Curve $G=0$ nicht erfüllt, so kann man doch immer die Curve so in Teile zerlegen, dass x', y' innerhalb jedes dieser Teile stetig sind. Es folgt hieraus aber noch nicht, dass auch $\frac{dx'}{dt}$ und $\frac{dy'}{dt}$ innerhalb eines solchen Teiles stetig sind, wie wir es in obiger Entwicklung vorausgesetzt haben. Wenn jedoch $\frac{dx'}{dt}$ und $\frac{dy'}{dt}$ innerhalb eines solchen Teiles unstetig sind, so hat man die Curve in weitere Teile derart zu zerlegen, dass innerhalb der neuen Curvenstücke $\frac{dx'}{dt}$ und $\frac{dy'}{dt}$ keine Sprünge mehr erleiden. Eine solche Zerlegung der Curve in einzelne Stücke ist von vorn herein wirklich ausführbar, da man ja durch die Integration der Gleichung $G=0$ die zu behandelnde Curve bereits kennt. Es finden dann auf jedes dieser Curvenstücke dieselben Schlüsse Anwendung, wie vorher bei der ganzen Curve und es ist somit die Voraussetzung über die stetige Aenderung von $\frac{dx'}{dt}$ und $\frac{dy'}{dt}$ längs der ganzen Curve nicht notwendig.

Wenn man sich aber auf die Betrachtung eines Teiles der Curve beschränkt hätte, in welchem sich $x, y, x', y' \frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}$ stetig ändern, so würde doch immer bei der Ausführung des Integrals $\int \frac{dR}{dt} dt$ die Stetigkeit von $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}$ vorausgesetzt worden sein; allein diese Annahme braucht offenbar nicht erfüllt zu sein, weil die Variation der Curve eine beliebige sein soll und daher sehr wohl solche Variationen in Betracht gezogen werden müssen, bei denen $\frac{d\xi}{dt}$ und $\frac{d\eta}{dt}$ beliebig oft unstetig sind. Diese Annahme können wir aber in der That ganz fallen lassen, ohne dass dadurch das Endresultat alterirt wird, sobald nur die erstgenannten Bedingungen sämmtlich erfüllt sind. Denn die Grössen L, M, N hängen nur von $x, y, x', y', \frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}$ ab und wenn diese stetig sind, so ist die Ausführung des Integrals $\int \frac{dR}{dt} dt$ in der angegebenen Form stets gestattet. Wenn nämlich $\frac{d\xi}{dt}$ und $\frac{d\eta}{dt}$ nicht stetig für den ganzen Verlauf der variirten Curve wären, so könnten wir uns letztere in Teile zerlegt denken, innerhalb deren obige Ableitungen sich stetig änderten und das Inte-

-gral $\int \frac{dR}{dt}\,dt$ zerfiele dann in eine Summe von Integralen von der Form $\int_{t_s}^{t_{s+1}} \frac{dR}{dt} = \left[\mathfrak{L}\,\xi^2 + 2\,\mathfrak{M}\,\xi\,\eta + \mathfrak{N}\,\eta^2\right]_{t_s}^{t_{s+1}}$ worin t_s, t_{s+1} die den Coordinaten der Teilpunkte entsprechenden Werte von t sind. Da aber ξ und η sich stetig ändern, so erhielte man durch Summation jener Grössen wieder genau denselben Ausdruck $\left[\mathfrak{L}\,\xi^2 + 2\,\mathfrak{M}\,\xi\,\eta + \mathfrak{N}\,\eta^2\right]_{t_0}^{t_1}$ wie vorher.

Die Grössen $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$ kommen jedoch auch noch unter dem Integralzeichen im ersten Gliede der ersten Seite von 8) vor. Man kann dasselbe aber, dem (bestimmten) Begriff des Integrals zufolge auch dann noch in dieser Form schreiben, wenn sich jene Grössen unstetig ändern; nur hat man dann bei der wirklichen Ausführung der Integration das Integral entsprechend den Stellen, an denen jene Unstetigkeiten eintreten, in einzelne Teilintegrale zu zerlegen. Kurz, man sieht, dass die etwaige Unstetigkeit von $\frac{d\xi}{dt}$ und $\frac{d\eta}{dt}$ ohne Einfluss auf das Resultat bleibt, wofern nur x, y, x', y' $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, ξ, η stetig sind. Mithin ist die Annahme der Stetigkeit von $\frac{d\xi}{dt}$ und $\frac{d\eta}{dt}$ überflüssig; freilich dürfen diese Grössen auch nicht in jedem beliebig kleinen Intervall

Unstetigkeiten aufweisen, da derartige Variationen der Curve von vornherein von der Betrachtung auszuschliessen sind.

Soll nun das Integral 1.) für die Curve $G=0$ ein Maximum oder Minimum sein, so muss, wenn man die Curve unendlich wenig variirt, die dadurch entstehende Variation ΔJ des Integrals beständig dasselbe Vorzeichen haben, wie man auch ξ und η wählen mag. Hieraus folgt, dass notwendig auch die zweite Variation $\delta^2 J$ mit ΔJ beständig dasselbe Zeichen haben muss. Es ist nämlich:

$$\Delta J = \frac{1}{2}\,\delta^2 J + \frac{1}{3!}\,\delta^3 J + \dots$$

Genügen aber die Variationen ξ und η den gemachten Annahmen, so wird dasselbe mit $k\xi$ und $k\eta$ der Fall sein, wenn k eine kleine Grösse bedeutet und es wird, da die aufeinanderfolgenden Variationen der Function F ganze homogene Functionen von $\xi, \eta\ \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}$ sind, die entsprechende Variation des Integrals sein:

$$\Delta' J = \frac{1}{2}\,k^2\,\delta^2 J + \frac{1}{3!}\,k^3\,\delta^3 J + \dots$$

Wäre also $\delta^2 J$ z. B. negativ, während ΔJ positiv ist, so könnte man k so klein annehmen, dass das Zeichen von ΔJ allein vom

ersten Gliede der rechten Seite abhängt, also $\Delta' J$ negativ wäre. Es könnte somit das Integral kein Minimum sein, da die Variation desselben sich einmal positiv, einmal negativ herausstellt. Dasselbe gilt, wenn $\delta^2 J$ positiv und ΔJ negativ wäre. Hieraus folgt also, wenn wir vom Falle $\delta^2 J = 0$, auf den wir sogleich kurz eingehen werden, absehen, der folgende wesentliche Satz:

Soll das Integral 1.) ein Maximum oder Minimum sein, so muss seine zweite Variation beständig negativ oder beständig positiv sein.

In dem bereits angedeuteten Falle, dass $\delta^2 J$ für alle möglichen Variationen ξ, η verschwindet, muss auch $\delta^3 J$ verschwinden, wenn das Integral ein Maximum oder Minimum sein soll, und man ist dann, ähnlich wie in der Theorie der Maxima und Minima beim Verschwinden der zweiten Ableitungen, auf die Betrachtung der vierten Variation hingewiesen. Dabei häufen sich die zu erfüllenden Bedingungen aber in solchem Maße, dass eine mathematische Be-

handlung ausserordentlich complicirt und schwierig werden dürfte; wir begnügen uns daher in einem solchen Falle, ähnlich wie dies in der eben erwähnten Theorie geschah, mit dem Schlusse, dass im Allgemeinen weder ein Maximum noch ein Minimum stattfindet. – Von nun an wollen wir diesen Fall ausser Acht lassen. – Im Anschluss an den oben ausgesprochenen Satz können wir nun die Aufgabe der folgenden Untersuchung folgendermassen aussprechen:

Wenn ξ und η zwei willkürliche aber stetige und eindeutige Functionen von t sind, so soll untersucht werden, wann die ihnen entsprechende Variation des Integrals J beständig dasselbe Vorzeichen hat.

Diese Untersuchung hat eine grosse Aehnlichkeit mit der entsprechenden in der Theorie der Maxima und Minima. Um nämlich dort zu entscheiden, ob die Differenz $F(x_1 + \xi_1, \dots x_n + \xi_n) - F(x_1, \dots x_n)$ beständig dasselbe Vorzeichen habe, wie man auch $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ wählen mag, mussten wir das Aggregat der Glieder zweiter Dimension in der Entwicklung dieser Differenz

nach Potenzen der ξ, welches eine homogene quadratische Form dieser Grösse ist, in eine Summe von Quadraten linearer Function der ξ zerlegen. Etwas Aehnliches muss auch hier geschehen. Man denke sich etwa das Intervall $t_0 \dots t_1$ in unendlich viele unendlich kleine Intervalle $t_0 .. t'$, $t' .. t''$ u.s.w. zerlegt; damit wird das in $\delta^2 J$ vorkommende Integral dargestellt als Summe von unendlich vielen Integralen von der Form $\int_{t^{(n)}}^{t^{(n+1)}} (F(\frac{dw}{dt}) + F_2 w^2) dt$ und man kann dann w durch $w^{(n+1)} - \varepsilon(w^{(n+1)} - w^{(n)})$ ersetzen, wo $0 < \varepsilon < 1$ und $w^{(n)}$, $w^{(n+1)}$ die resp. $t^{(n)}$, $t^{(n+1)}$ entsprechenden Werte von w sind; ferner kann dann $\frac{dw}{dt}$ durch $\frac{w^{(n+1)} - w^{(n)}}{t^{(n+1)} - t^{(n)}}$ ersetzt werden. Dadurch aber verwandelt sich das ursprüngliche Integral in eine homogene Function zweiten Grades der unendlich vielen Grössen $w^{(n)}$. Denkt man sich nun diese Function in eine Summe von Quadraten zerlegt und geht schliesslich wieder auf die Integralform zurück, so nimmt das ursprüngliche Integral die Gestalt an:

$$\int_{t_0}^{t_1} E\varphi^2 \, dt.$$

Diese Form stellte Lagrange auf folgendem Wege her. Er brachte das Integral für die zweite Variation

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_1} \left(F \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + F_2 w^2 \right) dt + \Big[R \Big]_{t_0}^{t_1}$$

durch Addition und Subtraction des Ausdrucks $\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(vw^2)\, dt$, worin v eine noch zu bestimmende Function ist, auf die Form:

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_1} \left(F_1 \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + F_2 w^2 + \frac{d}{dt}(vw^2) \right) dt + \Big[R - vw^2 \Big]_{t_0}^{t_1}$$

und bestimmte nun v so, dass der Integrandus die Form eines Quadrates annahm. Hieraus folgte für v die Differentialgleichung

$$9.)\quad v^2 - F_1 \left(F_2 + \frac{dw}{dt} \right) = 0$$

und die Gleichung für $\delta^2 J$ nahm die Gestalt an:

$$10)\quad \delta^2 J = \int_{t_0}^{t_1} F_1 \left(\frac{dw}{dt} + \frac{v}{F_1} w \right)^2 dt + \Big[R - vw^2 \Big]_{t_0}^{t_1}$$

Aus dieser Form werden sich wichtige Bedingungen ableiten lassen, wählt man die Variationen so, dass die Endpunkte unverrückt bleiben, wodurch dann der zweite Ausdruck rechts in 10.) verschwindet, so

zeigt sich, dass im Falle eines Maximums oder Minimums F_1 sein Zeichen nicht wechseln darf. Bevor wir jedoch hierauf näher eingehen, haben wir noch nachzuweisen, dass die vorgenommene Transformation statthaft ist. Aus der Gleichung 9.) lässt sich dies nicht erkennen, insbesondere lässt sich trotz ihrer Einfachheit kein Schluss auf die zu der vorgenommenen Transformation notwendige Stetigkeit der Function v machen. Es ist daher wesentlich zu zeigen, dass sich die Gleichung 9.) zurückführen lässt auf eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung; denn bei einer solchen giebt es bestimmte Criterien, durch welche man entscheiden kann, ob eine Function, die ihr Genüge leistet, stetig und endlich bleibt oder nicht. —

Zu dem Ende setzen wir:

$$v = \frac{u_1}{u},$$

wo u, u_1 stetige Functionen von t und u innerhalb der Strecke $t_0 \ldots t_1$ von Null verschieden sein soll, dadurch geht 9.) über in

$$\frac{u_1^2}{u^2} - F_1 \left\{ F_2 + \frac{u\frac{du_1}{dt} - u_1\frac{du}{dt}}{u^2} \right\} = 0$$

oder da die Multiplication mit u^2 wegen $u \gtrless 0$ gestattet ist, in

$$F_1 u \left\{ \frac{du_1}{dt} + F_2 u \right\} - u_1 \left\{ F_1 \frac{du}{dt} + u_1 \right\} = 0$$

da eine der Functionen u, u_1 willkürlich gewählt werden kann, so verfügen wir über u_1 so, dass:

$$11.) \quad F_1 \frac{du}{dt} + u_1 = 0$$

Dann folgt zugleich, da u nicht verschwinden soll:

$$12.) \quad \frac{du_1}{dt} + F_2 u = 0,$$

aus denen sich das folgende ergiebt:

$$13.) \quad \frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{du}{dt}\right) - F_2 u = 0, \quad \text{oder}$$

$$13^a.) \quad F_1 \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{dF_1}{dt} \frac{du}{dt} - F_2 u = 0$$

Hierin sind F_1 und F_2 als gegebene Functionen von t zu betrachten. Hat man nun hieraus u bestimmt, so ergiebt die Gleichung 11.) auch u_1 und damit auch $\frac{u_1}{u} = v$ als Function von t. Der sich in dieser Weise ergebende Ausdruck von v besitzt scheinbar zwei willkürliche Constanten, während das Integral der Gleichung 9.) nur eine besitzen würde, aber dies ist in der That nur scheinbar. Denn wenn:

$$u = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t)$$

die allgemeine Lösung von 13ª) ist, so ist mit Benutzung von 11.)

$$v = \frac{u_1}{u} = -F_1 \frac{c_1 \varphi_1'(t) + c_2 \varphi_2'(t)}{c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t)}$$

und dieser Ausdruck hängt nur von dem Verhältniss der beiden Constanten, also nur von einer willkürlichen Grösse ab.

Nun ist nach 11.)

$$u_1 = F_1 \frac{du}{dt}, \quad \text{also } v = \frac{u_1}{u} = -\frac{F_1}{u} \frac{du}{dt}$$

und mithin wird, wenn die Endpunkte der Curve nicht variirt werden, die zweite Variation

$$14.) \quad \delta^2 J = \int_{t_0}^{t_1} F_1 \left\{ \frac{dw}{dt} - \frac{w}{u} \frac{du}{dt} \right\}^2 dt.$$

Diese Umformung hat natürlich nur dann einen Sinn, wenn sich innerhalb des Intervalles $t_0 \ldots t_1$ eine von 0 verschiedene Function u finden lässt, welche der Gleichung 13.) genügt. Die Entscheidung darüber, unter welchen Bedingungen dies der Fall ist setzt die Kenntniss der Theorie der linearen Differentialgleichungen in einer gewissen Ausdehnung voraus. Hier sei darüber zunächst nur

Folgendes bemerkt: Wenn F_1 und F_2 innerhalb des Intervalles $t_0 \ldots t_1$ stetig sind, so erhält man ~~Ableitungen aus~~ 13.) durch Differentiation alle höheren Ableitungen von u ausgedrückt durch u und $\frac{du}{dt}$. Diese Ableitungen haben sämmtlich eine Potenz von F_1 im Nenner. Ist daher der Wert von u und $\frac{du}{dt}$ für einen bestimmten Wert t' gegeben, für den F_1 nicht verschwindet, so erhält man leicht eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(t'-t)$ für u, welche der Gleichung 13.) genügt.

Angenommen nun, F_1 habe für irgend einen im Intervalle $t_0 \ldots t_1$ liegenden Wert von t einen endlichen positiven oder negativen Wert, so wird es wegen seiner Stetigkeit auch noch für eine gewisse Umgebung von t', nämlich $t'-\tau_1 \ldots t'+\tau_2$ positiv resp. negativ sein. Alsdann variiren wir die Curve so, dass sie innerhalb $t'-\tau_1 \ldots t'+\tau_2$ ihre Gestalt beliebig ändert, ausserhalb dieser Strecke aber ungeändert bleibt; es hängt daher die vollständige und damit auch die zweite Variation des Integrals 1.) nur von der Variation der erwähnten Strecke ab und da nach den vorhin gemachten Bemerkungen für u eine innerhalb dieser Strecke stetige

der Gleichung B.) genügende Function von t gefunden werden kann von der Beschaffenheit dass $\frac{du}{dt}$ und u für $t = t'$ einen gegebenen Wert haben, so ist hier die oben durchgeführte Transformation zulässig und man erhält:

$$\delta^2 J = \int_{t'-\tau_1}^{t'+\tau_2} F_1 \left\{ \frac{dw}{dt} - \frac{du}{dt} \frac{w}{u} \right\}^2 dt.$$

Diese Grösse ist sicher positiv resp. negativ, da F_1 positiv resp. negativ angenommen ist. Verstehen wir nun unter κ eine beliebig kleine Grösse und nehmen wir die Variationen der Curve in der Form $\kappa \xi$, $\kappa \eta$ an, so dass ξ und η endlich sind, so ist die vollständige Variation des Integrals

$$\Delta J = \frac{\kappa^2}{2} \int_{t'-\tau_1}^{t'+\tau_2} F_1 \left(\frac{dw}{dt} - \frac{du}{dt} \frac{w}{u} \right)^2 dt + \frac{\kappa^3}{3!} \int_{t'-\tau}^{t'+\tau_2} \left(\xi, \eta \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt} \right)_3 dt + \ldots$$

Dieselbe ist also ihrem Zeichen nach vom ersten Gliede abhängig. Damit ist dann der folgende Satz bewiesen:

Die vollständige Variation des Integrals 1.) kann positiv resp. negativ gemacht werden, wenn die Function F_1 nur an irgend einer Stelle zwischen t_0 und t_1 positiv resp. negativ ist.

Könnte also F_1 an irgend einer Stelle der Curve sein Vorzeichen wechseln, so würde man Variationen der Curve angeben können, für welche ΔI positiv und andere, für welche ΔI negativ wäre. Es ist daher Folgendes eine zweite für die Existenz eines Maximums des Integrals 1.) notwendige Bedingung:

Damit ein Maximum oder Minimum des über die Curve $G=0$ innerhalb des Intervalls $t_0 .. t_1$ genommenen Integrals 1.) existire, ist notwendig, dass F_1 innerhalb des ganzen Intervalls $t_0 .. t_1$ sein Vorzeichen nicht wechsele und zwar muss F_1 im Falle eines Maximums beständig negativ, im Falle eines Minimums beständig positiv sein.

Diese Bedingung ist jedoch noch nicht hinreichend für die Existenz eines Maximums oder Minimums. Wenn man auch unter der Voraussetzung, dass F_1 im ganzen Intervalle $t_0 .. t_1$ von 0 und ∞ verschieden bleibt, zwei Functionen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ finden kann, welche der Gleichung 13) genügen, so dass $u = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t)$ das allgemeine Integral derselben ist, und wenn man zeigen

kann, dass dann u innerhalb der Integrationsgrenzen nicht ∞ wird, so kann doch sehr wohl der Fall eintreten, dass, wie man auch die Constanten c_1 und c_2 wählen mag, die Function u innerhalb des Intervalls $t_0 \ldots t_1$ verschwindet, dass in Folge dessen die gemachte Transformation von $\delta^2 J$ unzulässig wird und somit über das Eintreten eines Maximums oder Minimums nichts geschlossen werden kann. Dies führt uns von neuem zu der Notwendigkeit, die durch 13) definirte Function u genauer zu studiren, um zu erkennen, unter welchen Umständen dieselbe innerhalb des Intervalls $t_0 \ldots t_1$ nicht verschwindet. — Hierbei ist eine Entdeckung Jacobi's von großer Wichtigkeit, welcher zeigte, dass mit der Integration der Differentialgleichung $G = 0$ auch diejenige der Differentialgleichung (13) für u geleistet sei. Man kann alsdann den allgemeinen Ausdruck für u herstellen und erhält dadurch vollständig die Mittel zur Entscheidung der Frage, ob und wann u gleich 0 wird.

Um den Beweis des Satzes von Jacobi nicht

durch nebensächliche Rechnungen aufzuhalten, schicken wir die Berechnung der Variation voraus, welche G erfährt, wenn man x um ξ und y um η vermehrt. – Es war:

$$G = \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x' . \partial y'} + F_1 \left(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right)$$

Setzt man nun:

$$G_1 = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right)$$

$$G_2 = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right),$$

so ist, wie pag. Gl. 10) gezeigt wurde

$$G_1 = y' G, \quad G_2 = -x' G$$

und es kann daher die Gleichung $G = 0$ durch eine der beiden Gleichungen $G_1 = 0$ oder $G_2 = 0$ ersetzt werden. Indem man nun in der angegebenen Weise variirt, folgt:

$$\delta G_1 = y' \delta G + \frac{d\eta}{dt} G$$

$$\delta G_2 = -x' \delta G - \frac{d\xi}{dt} G$$

und folglich

$$\delta G_1 \frac{d\xi}{dt} + \delta G_2 \frac{d\eta}{dt} = \left(y' \frac{d\xi}{dt} - x' \frac{d\eta}{dt} \right) \delta G.$$

Nun ist aber:

$$\delta G_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \xi + \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial y} \eta + \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial x'} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial y'} \frac{d\eta}{dt}$$

$$- \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial x'} \xi + \frac{\partial^2 F}{\partial y . \partial x'} \eta + \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial x' . \partial y'} \frac{d\eta}{dt} \right)$$

und dieser Ausdruck lässt sich mittelst der Gleichungen 2) 3) und 4) in den folgenden umwandeln:

$$\delta G_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\xi + \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial y}\eta + \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial x'}\frac{\partial \xi}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial y'}\frac{\partial \eta}{dt}$$

$$- \frac{dL}{dt}\xi - \frac{dM}{dt}\eta - L\frac{d\xi}{dt} - M\frac{d\eta}{dt} - \frac{d}{dt}\left(F_1 y'\frac{dw}{dt}\right)$$

und hieraus ergiebt sich in Folge der Gleichungen 3.) 4.) 6) und 7):

$$\delta G_1 = -y'\frac{d}{dt}\left(F_1\frac{dw}{dt}\right) + y' F_2 w,$$

analog erhält man

$$\delta G_2 = x'\frac{d}{dt}\left(F_1\frac{dw}{dt}\right) - x' F_2 w.$$

Setzt man nun dies in die Gleichung

$$\delta G_1\frac{d\xi}{dt} + \delta G_2\frac{d\eta}{dt} = \left(y'\frac{d\xi}{dt} - x'\frac{d\eta}{dt}\right)\delta G$$

ein, so ergiebt sich

$$15.)\quad \delta G = \frac{d}{dt}\left(F_1\frac{dw}{dt}\right) + F_2 w.$$

Es hat somit δG genau dieselbe Form, wie die linke Seite der Gleichung 13.) für u; die vollständige Variation von G ist:

$$\Delta G = G\left(x+\xi, y+\eta, x'+\frac{d\xi}{dt}, y'+\frac{d\eta}{dt}, \frac{dx'}{dt}+\frac{d^2\xi}{dt^2}, \frac{dy'}{dt}+\frac{d^2\eta}{dt}\right) - G\left(x, y, x', y', \frac{dx'}{dt}, \frac{d}{}\right)$$

$$= -\frac{d}{dt}\left(F_1\frac{dw}{dt}\right) + F_2 w + (\ldots)_2 + (\ldots)_3 + \ldots$$

Angenommen nun, die Gleichung $G = 0$ sei vollständig integrirt und die Lösungen

derselben seien:

$$x = \varphi(t, \alpha\, \beta),\ y = \psi(t, \alpha, \beta),$$

worin α und β willkürliche Integrationsconstanten bezeichnen, so wird dieselbe auch befriedigt werden, wenn wir α und β einmal beliebig fixiren, und sie dann um zwei beliebig kleine Grössen $\delta\alpha$ resp. $\delta\beta$ vermehren, d. h. es werden auch die Functionen

$$\bar{x} = \varphi(t, \alpha + \delta\alpha, \beta + \delta\beta),\ \bar{y} = \psi(t, \alpha + \delta\alpha, \beta + \delta\beta)$$

Lösungen der Gleichung $G = 0$ sein. Wählt man nun die Variation der ersten Curve so, dass

$$\bar{x} = x + \xi,\ \bar{y} = y + \eta$$

wird, wie auch $\delta\alpha$ und $\delta\beta$ beschaffen sein mögen, d. h. bestimmt man ξ und η durch die Gleichungen

$$\xi = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\,\delta\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\,\delta\beta + (\ .\ )_2 + \ldots$$

$$\eta = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\,\delta\alpha + \frac{\partial \psi}{\partial \beta}\,\delta\beta + (\ .\ .\ )_2 + \ldots$$

so werden diese Ausdrücke für ξ und η in ΔG eingesetzt, die rechte Seite identisch gleich Null machen und es müssen daher, da $\delta\alpha$ und $\delta\beta$ durchaus willkürlich sind, die Coefficienten der einzelnen Potenzen von $\delta\alpha$ und $\delta\beta$ einzeln für sich verschwinden. Sind nun $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ die auf die Glieder erster Dimension reducirten Werte von ξ und η, so erhält man hiermit die Gleichung:

$$-\frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{d}{dt}(y'\bar{\xi} - x'\bar{\eta})\right) + F_2(y'\bar{\xi} - x'\bar{\eta}) = 0,$$

die wiederum in zwei Gleichungen zerfällt, wenn man die Coefficienten von $\delta\alpha$ und $\delta\beta$ einzeln gleich 0 setzt. Führen wir nun die Bezeichnungen ein:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi'(t), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = \varphi_1(t), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = \varphi_2(t)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \psi'(t), \quad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = \psi_1(t), \quad \frac{\partial\psi}{\partial\beta} = \psi_2(t)$$

16.) $\vartheta_1(t) = \psi'(t)\,\varphi_1(t) - \varphi'(t)\,\psi_1(t)$

$\vartheta_2(t) = \psi'(t)\,\varphi_2(t) - \varphi'(t)\,\psi_2(t)$.

so nehmen die beiden Gleichungen, die aus dem Verschwinden der Coefficienten von $\delta\alpha$, $\delta\beta$ hervorgehen, die Gestalt an:

$$-\frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{d\,\vartheta_1(t)}{dt}\right) + F_2\,\vartheta_1(t) = 0$$

$$-\frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{d\,\vartheta_2(t)}{dt}\right) + F_2\,\vartheta_2(t) = 0$$

woraus man sofort ersieht, dass $\vartheta_1(t)$ und $\vartheta_2(t)$ Lösungen der Differentialgleichung $\frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{du}{dt}\right) - F_2\,u = 0$ sind. Es muss aber noch nachgewiesen werden, dass die angegebenen Lösungen auch linear von einander unabhängig sind. Um diesen Nachweis möglichst einfach zu führen, denken wir uns statt der willkürlichen Grösse t

geradezu x gesetzt. Alsdann gehen die Gleichungen $x=\varphi(t,\alpha,\beta)$, $y=\psi(t,\alpha,\beta)$ einfach über in $x=x$, $y=\psi(x,\alpha,\beta)$ und es wird

$$\varphi'=1,\ \varphi_1=0,\ \varphi_2=0,\ \psi'=\frac{d\psi}{dx}$$

und

$$\vartheta_1=-\psi_1,\quad \vartheta_2=-\psi_2$$

Wären nun ϑ_1 und ϑ_2 linear von einander abhängig, so müsste sein

$$\vartheta_2=\text{const.}\ \vartheta_1$$

und hieraus würde sich die Gleichung ergeben:

$$\vartheta_1\vartheta_2'-\vartheta_2\vartheta_1'=0,$$

wobei stets die Accente Differentiationen nach x bedeuten oder

$$\psi_1\psi_2'-\psi_2\psi_1'=0.$$

Anderseits ist aber $y=\psi(x,\alpha,\beta)$ die vollständige Lösung der aus der Gleichung $G=0$ durch die Substitution $t=x$ sich ergebende Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{dF}{\partial\frac{dy}{dx}}-\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

d. h. es sind α und β zwei willkürliche, nicht aufeinander reducirbare Constanten und somit nach einem bekannten Satze ψ und $\psi'=\frac{\partial\psi}{dx}$ in Bezug auf α und β von einander unabhängig, also die Determinante

$$\psi_1\psi_2'-\psi_2\psi_1'$$

von o verschieden. Mithin müssen die beiden Functionen $\vartheta_1(t)$, $\vartheta_2(t)$ von einander linear unabhängig sein, da die Annahme des Gegenteils auf eine mit dem Vorstehenden im Widerspruch stehende Gleichung geführt hat. Es besitzt somit das allgemeine Integral der Differentialgleichung 13.) die Gestalt:

$$u = c_1 \vartheta_1(t) + c_2 \vartheta_2(t),$$

worin c_1 und c_2 willkürliche Constanten sind. — Damit ist die Behauptung Jacobi's erwiesen, denn sobald die Gleichung $G=0$ vollständig integrirt ist, ist es hiernach leicht auch die vollständige Lösung der Differentialgleichung 13) für u darzustellen. Die Constanten c_1 und c_2 können nun so bestimmt werden, dass u an einer bestimmten Stelle t', die vor t_0 liegen möge, verschwindet, man braucht zu dem Ende nur $c_1 = -\vartheta_2(t')$ und $c_2 = \vartheta_1(t')$ zu setzen. Geschieht dies, so lautet die Lösung u der Gleichung 13.):

$$17)\quad u = \vartheta_1(t')\,\vartheta_2(t) - \vartheta_2(t')\,\vartheta_1(t) = \Theta(t, t')$$

Lässt man nun t von t' ab wachsen, so ist es möglich, dass $\Theta(t, t')$ für keinen weiteren Wert von t verschwindet; es kann aber auch der Fall eintreten, dass $\Theta(t, t')$ ausser der Stelle t' noch

andere Nullstellen besitzt. Ist nun t'' die erste auf t' folgende Nullstelle der Function $\Theta(t, t')$ so wollen wir t'' den zu t' conjugirten Punkt nennen. Da t' ganz willkürlich gewählt ist, so können wir auf diese Weise jedem Punkte der Curve einem zweiten, den zu ihm conjugirten, zuordnen.

Dies vorausgeschickt gilt nun der folgende ebenfalls von Jacobi gegebene Satz:

> Wenn es innerhalb der Strecke $t_0 \ldots t_1$ keine zwei Punkte giebt, die in dem eben erwähnten Sinne einander conjugirt sind, so ist es möglich, u so zu bestimmen, dass es der Differentialgleichung 13) genügt und innerhalb des Intervalls $t_0 \ldots t_1$ nirgends verschwindet.

Es sei der Punkt $t = t'$ eine Nullstelle der Function $u = \Theta(t, t')$ und t'' sei der dazu conjugirte Punkt, dann wird $\Theta(t, t')$ innerhalb der Strecke $t' \ldots t''$ nicht mehr verschwinden. Nimmt man alsdann in der Nähe von t' einen festen Punkt $t' + \tau$ an, wo $\tau > 0$ sein soll, so kann der zu $t' + \tau$ conjugirte Punkt nur über t'' hinaus liegen. Dies beweist man folgendermassen: Wenn $u = \Theta(t, t')$ eine Lösung der Gleichung:

$$F_1 \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{dF_1}{dt} \cdot \frac{du}{dt} - F_2 u = 0$$

ist, so ist auch

$$u' = \Theta(t, t'+\tau)$$

eine Lösung derselben Gleichung, also

$$F_1 \frac{d^2u'}{dt^2} + \frac{dF_1}{dt} \cdot \frac{du'}{dt} - F_2 u' = 0$$

denn es unterscheidet sich u' von u nur durch eine andere Wahl der Integrationscontanten c_1 und c_2. Ist τ hinreichend nahe bei t' gewählt, so wird $\Theta(t'+\tau, t')$ und somit auch $\Theta(t', t'+\tau)$ von 0 verschieden sein. Eliminirt man nun aus diesen beiden Gleichungen F_2, so folgt:

$$F_1\left(u' \frac{d^2u}{dt^2} - u \frac{d^2u'}{dt^2}\right) + \frac{dF_1}{dt}\left(u' \frac{du}{dt} - u \frac{du'}{dt}\right) = 0$$

Setzt man also:

$$u' \frac{du}{dt} - u \frac{du'}{dt} = v,$$

so geht diese Gleichung über in:

$$\frac{dv}{v} = - \frac{dF_1}{F_1}$$

und daraus folgt durch Integration:

$$18) \quad v = u' \frac{du}{dt} - u \frac{du'}{dt} = - \frac{C}{F_1}$$

Hierin kann die Constante C nicht verschwinden; denn sonst würde ~~d~~ hieraus folgen, dass $u = \text{const.}\, u'$ oder $\Theta(t, t') = \text{const.}\, \Theta(t, t'+\tau)$ ist. Da nun $\Theta(t, t')$ für $t = t'$ verschwindet, so müsste auch $\Theta(t', t'+\tau) = 0$ sein, was gegen unsere

Voraussetzung ist. Ferner ist von F_1 vorausgesetzt, dass innerhalb des Intervalles $t_0 .. t_1$ sein Vorzeichen nicht wechsele und nicht 0 werde. Verschwindet F_1 ohne aus dem Positiven ins Negative oder umgekehrt überzugehen, innerhalb der Strecke $t_0 .. t_1$, so lassen sich im Allgemeinen keine weiteren Folgerungen daran knüpfen und es muss für jeden besonderen Fall eine Specialuntersuchung eintreten. Im ersteren Falle aber besitzt v einen endlichen Wert und es ergiebt sich, wenn man obige Gleichung durch u^2 dividirt:

$$\frac{u \frac{du'}{dt} - u' \frac{du}{dt}}{u^2} = \frac{d \frac{u}{u'}}{dt} = \frac{C}{F_1 u^2}$$

und hieraus durch Integration

$$u' = C u \int_{t'+\tau} \frac{dt}{F_1 u^2}$$

Da nun zwischen t' und t'' die Function u nicht verschwindet, so folgt hieraus, dass u' zwischen den Grenzen $t'+\tau$, t'' niemals verschwindet kann. Giebt es dann noch einen zu $t'+\tau$ conjugirten Punkt, so kann derselbe wenigstens nicht vor t'' liegen. Wenn wir also einen Punkt t''' diesseits t'', aber der Stelle t'' beliebig nahe wählen, so wird

u' in dem Intervall $t'+\tau \ldots t'''$ sicher nicht verschwinden.

Bestimmt man nun zu dem unmittelbar vor t_0 liegenden Punkt t' den zu ihm conjugirten und wählt man den Punkt t_1 vor diesem, wenn auch demselben noch so nahe, so ist man nach dem Vorhergehenden sicher, dass im Intervall $t_0 \ldots t_1$, die Grenzen mit eingeschlossen keine einander conjugirten Punkte liegen und man kann dann, wie beweisen, eine der Gleichung (B.) genügende Function u finden, die weder an den Grenzen, noch innerhalb des Intervalls verschwindet. Die vorgenommene Transformation von $\delta^2 J$ ist dann zulässig und das Vorzeichen von $\delta^2 J$ allein von dem Vorzeichen von F_1 abhängig. Damit ist aber unsere Untersuchung keineswegs abgeschlossen. Es ist vielmehr nur gezeigt: Unter den angegebenen Voraussetzungen über F_1 und $t_0 \ldots t_1$ lässt sich die zweite Variation auf eine Form bringen, die sie ihrem Vorzeichen nach von F_1 allein abhängig macht ohne Rücksicht darauf, wie ξ und η gewählt werden. Wir schlossen dann, dass auch die vollständige Variation des Intervalls J dasselbe

188.) Vorzeichen haben müsse, wie die zweite Variation, indem wir an Stelle von ξ und η resp. $\kappa\xi$ und $\kappa\eta$ setzten, wo κ eine hinreichend kleine Grösse und ξ, η willkürliche aber stetige Functionen von t sind. Dies bedarf jedoch nach mehreren Seiten hin der Ergänzung. Einerseits könnte man fragen – und diese Frage muss beantwortet werden – ob denn jene Umformung von $\delta^2 J$ unter allen Umständen notwendig sei, oder ob nicht etwa $\delta^2 J$ unabhängig von ξ und η einen positiven oder negativen Wert haben könne, wenn es auch nicht gerade auf diese besondere Form gebracht werden kann.

Anderseits lässt es sich kaum nachweisen, dass alle Variationen auf die Form $\kappa\xi, \kappa\eta$ gebracht werden können, und selbst wenn dies der Fall wäre, bliebe es fraglich, ob dann unter allen Umständen das Vorzeichen der vollständigen Variation durch das der zweiten allein bedingt sei. Allerdings kann man, wenn zuerst ξ und η willkürlich gewählt sind, stets κ so klein wählen, dass das Vorzeichen ΔJ mit dem von $\delta^2 J$ übereinstimmt; denkt man sich aber κ als feste Grösse, und dann ξ und η willkürlich gewählt, so werden

$\varkappa\xi$ und $\varkappa\eta$ durchaus zulässige Variationen und es könnte bei geeigneter Wahl von ξ und η eintreten, dass die in

$$\delta^2 J = \varkappa^2 \int_{t_0}^{t_1} F_1 \left(\frac{dw}{dt} - \frac{w}{u}\frac{du}{dt}\right)^2 dt$$

unter dem Integralzeichen stehende Function selbst schon eine unendlich kleine Grösse wäre, so dass für das Vorzeichen der vollständigen Variation nicht das der zweiten Variation allein bestimmend zu sein brauchte. –

Aber wir haben noch andere nicht berechtigte Annahmen gemacht. Wir setzen voraus, dass ξ, η, $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$ stetige Functionen von t sein sollten und nur die letzteren Grössen $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$ durften sich an einigen Stellen sprungweise ändern, d. h. wir legten unserer Untersuchung die Vorstellung zu Grunde, dass auch die variirte Curve entweder in ihrem ganzen Verlaufe regulär sei, oder dass sie wenigstens aus einzelnen regulären Stücken bestehe. Diese Voraussetzung darf aber nicht gemacht werden, weil dadurch die Aufgabe der Variationsrechnung wesentlich beschränkt würde. Die Variation

der Curve muss vielmehr eine ganz allgemeine sein, so wie sie im Eingange zu dieser Theorie definirt wurde, d. h. jedem Punkte der ursprünglichen Curve soll ein Punkt der variirten Curve entsprechen und die Entfernung zweier entsprechender Punkte soll beliebig klein sein; wie im Übrigen die variirte Curve beschaffen ist, das muss für die Existenz eines Maximums oder Minimums gleichgiltig bleiben. Denn wenn es auch unter den regulären variirten Curven keine giebt, die einen grösseren, resp. kleineren Wert des Integrals liefert, als die ursprüngliche, so folgt daraus doch noch nicht, dass dies auch bei den regulären der Fall ist, dass also ein Maximum oder Minimum wirklich existirt.

Unsere Criterien müssen mithin noch ergänzt und es muss noch gezeigt werden, dass ein Maximum oder Minimum wirklich existirt, wenn die drei angegebenen Bedingungen erfüllt sind, wie man auch immerhin ξ und η annehmen mag.

Bevor dies jedoch geschieht, haben wir noch einen Einwand zu widerlegen, der von Bertrand in einer Note

zu Lagrange's Mécanique analytique gegen das von Jacobi aufgestellte Criterium erhoben worden ist.

Capitel 8.

Widerlegung des von Bertrand gegen das Jacobi'sche Criterium erhobenen Einwandes.

In einer Anmerkung zu der Mécanique analytique von Lagrange beim Problem der kürzesten Linie ist von Bertrand ein Bedenken gegen die Behauptung Jacobi's erhoben worden, dass nur innerhalb einer Strecke $t_0 \ldots t_1$, in welcher kein zu t_0 conjugirter Punkt sich findet, ein Maximum oder Minimum des Integrals stattfinden könne. Wenn es auch richtig sei, sagt nämlich Bertrand, dass für eine solche Stelle ein Maximum oder Minimum wirklich eintrete, so sei damit doch noch nicht ausgeschlossen, dass die Curve $G = 0$ auch über diese Strecke hinaus diese Eigenschaft, das Integral zu einem Maximum oder Minimum zu machen, beibehalten könne. Jacobi selbst hat das letztere allerdings nicht ausdrücklich widerlegt, allein es wird sich ohne Schwierigkeit zeigen

lassen, dass der Bertrand'sche Einwand in der That unbegründet ist. Wir werden den Nachweis führen, dass die Eigenschaft, ein Maximum oder Minimum des Integrals zu liefern, der Curve nur innerhalb einer Strecke zukommt, welche kein Paar conjugirter Punkte enthält, indem wir zeigen, dass die vollständige Variation des Integrals je nach der Wahl der Variationen, die übrigens an den Grenzen verschwinden sollen, bald positiv, bald negativ gemacht werden kann, wenn t_1 über den zu t_0 conjugirten Punkt hinaus liegt, selbst wenn F_1 innerhalb $t_0 \dots t_1$ unveränderlichen Vorzeichens ist.

Die ursprüngliche Form der zweiten Variation war folgende:

$$1) \quad \delta^2 J = \int_{t_0}^{t_1} \left(F_1 \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 + F_2 w^2 \right) dt.$$

Dieselbe lässt sich mittelst der Formel:

$$\frac{d}{dt} \left(F_1 w \frac{dw}{dt} \right) = F_1 \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 + w \frac{d}{dt} \left(F_1 \frac{dw}{dt} \right),$$

wenn man beachtet, dass w an den Grenzen verschwindet, auf die Gestalt bringen:

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_1} w \left(F_2 w - \frac{d}{dt} \left(F_1 \frac{dw}{dt} \right) \right) dt,$$

in welchen der Factor von w genau dieselbe Form hat, wie die linke Seite der Differentialgleichung für u. Angenommen also, es liesse sich eine Function u bestimmen, welche der Differentialgleichung

$$2.)\ \frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{du}{dt}\right) - F_2 u = 0$$

genügt und für welche t_0 und t_1 auf einander folgende Nullstellen sind, so könnten wir die Variationen doch so wählen, dass sie selbst an den Grenzen verschwinden und dass $w = ku$ wird wo k eine beliebige Constante bezeichnet. Alsdann genügt w der vorstehenden Differentialgleichung und verschwindet für t_0 und t_1 und mithin könnte man die ursprüngliche Curve stets so variiren, dass die zweite Variation verschwindet und die vollständige Variation mit Gliedern von mindestens der dritten Dimension beginnt. Da das Aggregat derselben im Allgemeinen nicht verschwindet, so werden wir schliessen können, dass die vollständige Variation sowohl positiv als negativ gemacht werden kann und dass somit das Jacobi'sche Criterium im Allgemeinen wohl begründet ist. In besonderen Fällen allerdings könnte es geschehen, dass

auch das Aggregat der Glieder dritter Dimension für alle Variationen verschwindet und daher das Vorzeichen von ΔJ von dem Aggregat der Glieder vierter Dimension abhängt. Jedenfalls müsste man also untersuchen, ob die Glieder dritter Dimension verschwinden oder nicht, um über das Bestehen des Jacobi'schen Criteriums Aufschluss zu erhalten. Diese ohne Zweifel sehr complicirte Untersuchung kann jedoch umgangen werden, es lässt sich nämlich auf einem einfachen Wege in aller Strenge nachweisen, dass die Integration nicht über eine Strecke ausgedehnt werden darf, in welcher ein conjugirtes Punktepaar liegt. Dabei kann man sich auf den Fall beschränken, dass die Grenzen t_0 und t_1 selbst conjugirte Punkte sind, weil man ja stets die Curve so variiren kann, dass die ausserhalb $t_0 .. t_1$ liegenden Strecken unverändert bleiben und nur die Strecke zwischen den beiden conjugirten Punkten variirt wird. – Verstehen wir unter ε eine Constante, welche positiv oder negativ sein soll, je nachdem F_1 positiv oder negativ ist, so können wir die zweite Variation in der Form schreiben:

$$3.)\quad \delta^2 J = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ (F_1 + \varepsilon)\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + (F_2 + \varepsilon)\, w^2 \right\} dt - \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \left(\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + w^2 \right) dt$$

und diesen Ausdruck kann man, falls w an den Grenzen verschwindet, umwandeln in:

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_1} w \left\{ (F_2 + \varepsilon) w - \frac{d}{dt}\left((F_1 + \varepsilon) \frac{dw}{dt} \right) \right\} dt - \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \left(\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + w^2 \right)$$

Nun lässt sich nach dem Vorhergehenden das erste Integral in dieser Gleichung zum Verschwinden bringen, wenn es gelingt, die Differentialgleichung

$$4.)\quad (F_2 + \varepsilon) u - \frac{d}{dt}\left((F_1 + \varepsilon) \frac{du}{dt} \right) = 0$$

so zu integriren, dass u an den Grenzen t_0 und t_1 verschwindet. Für $\varepsilon = 0$ geht diese Gleichung in 2.) über, deren Integral bekanntlich die Form hat:

$$u = \Theta(t, t_0) = \vartheta_1(t_0)\, \vartheta_2(t) - \vartheta_2(t_0)\, \vartheta_1(t)$$

Die auf t_0 folgende Nullstelle dieser Function ist nach der Voraussetzung von t_1. Es kommt also nur darauf an zu zeigen, dass die Gleichung 4.) ein Integral $\bar{u}$ liefert, das innerhalb $t_0 \ldots t_1$ sich stetig ändert und an den Grenzen t_0, t_1 selbst verschwindet. – Dazu dient uns folgender Satz aus der Theorie der Differentialgleichungen:

Angenommen man habe die Differentialgleichung:

$$P\frac{d^2u}{dt^2}+Q\frac{du}{dt}+Ru=0,$$

in welcher der Veränderlichen t nur solche Werte beigelegt werden sollen, für welche P nicht verschwindet, durch eine stetige Function u von t integrirt, und man betrachtet dann an Stelle dieser Gleichung die folgende:

$$(P+\varepsilon p)\frac{d^2u}{dt^2}+(Q+\varepsilon q)\frac{du}{dt}+(R+\varepsilon r)u=0,$$

in welcher ε eine Constante ist und p, q, r stetige Functionen von t sind, so kann man für ε eine Grenze ε_0 so bestimmen dass für $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ und alle in Betracht kommenden Werte von t die Grösse $P+\varepsilon p$ dasselbe Vorzeichen hat wie P selbst. Dann kann die zweite Gleichung ebenfalls durch eine stetige Function $\bar{u}$ von t integrirt werden, und wenn man festsetzt, dass sowohl u als auch $\bar{u}$ für irgend einen bestimmten Wert t' von t verschwinden sollen, so kann man für ε eine so kleine Grenze ε' annehmen, dass für $|\varepsilon|<\varepsilon'$ die Differenz $\bar{u}-u$ kleiner ist als eine beliebig klein angenommene Grösse δ. Setzen wir also:

$$\bar{u}=u+f(t,\varepsilon),$$

so ist für alle in Betracht kommenden Wert

von t und für $|\varepsilon| < \varepsilon'$ auch $|f(t, \varepsilon)| < \delta$.

Unter $\vartheta_1(t, \varepsilon)$ und $\vartheta_2(t, \varepsilon)$ wollen wir nun Functionen verstehen, die mit abnehmendem ε sich mehr und mehr resp. $\vartheta_1(t)$ und $\vartheta_2(t)$ nähern und für $\varepsilon = 0$ in diese selbst übergehen und die ausserdem der Differentialgleichung 4.) genügen. Setzen wir ferner fest, dass $t = t_0$ auch Nullstelle des Integrals der Differentialgleichung 4.) sein soll, so können wir uns dasselbe auf die Form gebracht denken:

5.) $\bar{u} = \vartheta_1(t_0, \varepsilon)\,\vartheta_2(t, \varepsilon) - \vartheta_2(t_0, \varepsilon)\,\vartheta_1(t, \varepsilon) = \Theta(t, t_0, \varepsilon)$

und es ist dann nach dem eben angeführten Satze:

6.) $\Theta(t, t_0, \varepsilon) = \Theta(t, t_0) + (\varepsilon, t)$.

worin (ε, t) eine Grösse bezeichnet, die sich für jeden Wert von t zugleich mit ε der Null nähert. Hieraus schliessen wir, dass die Function $\Theta(t, t_0, \varepsilon)$ zum zweiten Male in der Nähe des Punktes t_1, für welchen $\Theta(t, t_0) = 0$ ist, verschwinden wird. Zur strengen Begründung dieser Thatsache bedürfen wir des Satzes, dass die Function $\Theta(t, t_0)$ an den Stellen, wo sie verschwindet, ihr Vorzeichen wechselt. Da nämlich $\vartheta_1(t)$ und $\vartheta_2(t)$ Integrale der Gleichung 2.)

sind, so gilt nach Gleichung B.) pag. 185 die Formel:

$$\vartheta_1(t)\,\vartheta_2'(t) - \vartheta_2(t)\,\vartheta_1'(t) = \frac{C}{F_1(t)},$$

worin wie eben dort bewiesen wurde, C von 0 verschieden und F_1 als endlich und ebenfalls von 0 verschieden vorausgesetzt ist. Hieraus folgt, dass weder $\vartheta_1(t)$ und $\vartheta_2(t)$, noch $\vartheta_1'(t)$ und $\vartheta_2'(t)$ für irgend einen Wert von t gleichzeitig verschwinden können. Wenn nun $\Theta(t, t_0)$ an irgend einer Stelle t' verschwindet, welche von t_0 verschieden ist, so folgt aus:

$$\vartheta_1(t_0)\,\vartheta_2(t') - \vartheta_2(t_0)\,\vartheta_1(t') = 0,$$

dass man hat:

$$\vartheta_1(t') = \kappa\,\vartheta_1(t_0), \quad \vartheta_2(t') = \kappa\,\vartheta_2(t_0),$$

worin κ eine von 0 verschiedene Constante bezeichnet. Da nun aber

$$\frac{d}{dt}\left(\Theta(t, t_0)\right) = \vartheta_1(t_0)\,\vartheta_2'(t) - \vartheta_2(t_0)\,\vartheta_1'(t),$$

so folgt

$$\left(\frac{d\,\Theta(t, t_0)}{dt}\right)_{t = t'} = \frac{1}{\kappa}\,\frac{C}{F_1(t')},$$

d. h. die Ableitung von $\Theta(t, t_0)$ verschwindet nicht an den Stellen, an welchen $\Theta(t, t_0)$ gleich Null wird. Das ist aber ein Beweis dafür, dass $\Theta(t, t_0)$ an allen Stellen, an denen es verschwindet, sein Zeichen wechselt.

Nehmen wir nun bei t_1 zwei diesem benachbarte Werte $t_1 - \tau$ und $t_1 + \tau$ an, so ist nach 6.)

$$\Theta(t_1 - \tau, t_0, \varepsilon) = \Theta(t_1 - \tau; t_0) + (\varepsilon, t_1 - \tau)$$

$$\Theta(t_1 + \tau, t_0 \varepsilon) = \Theta(t_1 + \tau, t_0) + (\varepsilon, t_1 + \tau)$$

und da hierin sämmtliche Functionen stetig sind, so kann es so klein gewählt werden, dass das Vorzeichen der rechten Seite in vorstehenden Gleichungen dasselbe ist, wie das des resp. ersten Gliedes. Es haben aber $\Theta(t_1 - \tau, t_0)$ und $\Theta(t_1 + \tau, t_0)$ nach dem oben bewiesenen Satze entgegengesetztes Vorzeichen und daraus folgt, dass die Function $\Theta(t, t_0, \varepsilon)$ innerhalb des beliebig kleinen Intervalles $t_1 - \tau \,..\, t_1 + \tau$ einmal den Wert 0 angenommen haben muss. Ist $t_1 + \tau_1$ die Stelle, an welcher dies geschieht, und wählen wir:

$$w = \kappa\, \Theta(t, t_0, \varepsilon),$$

so verschwindet w an den Stellen t_0 und $t_1 + \tau'$ und genügt für alle dazwischenliegenden Werte der Gleichung 4.). Dehnt man daher in dem Integrale 3) die Integration von t_0 bis $t_1 + \tau'$ aus, so verschwindet das erste Integral und es wird:

$$\delta^2 J = -\varepsilon \kappa^2 \int_{t_0}^{t_1+\tau'} \left\{ \left(\frac{d\,\Theta(t, t_0, \varepsilon)}{dt} \right)^2 + \Theta^2(t, t_0, \varepsilon) \right\} dt$$

Das Integral hat hierin sicher einen positiven Wert und da das Vorzeichen von ε mit dem von F_1 übereinstimmt, so wird die zweite Variation und damit auch, wie früher gezeigt wurde, die vollständige Variation ΔJ für diese speciellen Variationen der Curve positiv oder negativ gemacht werden können, je nachdem F_1 negativ oder positiv ist, während doch ΔJ für alle Variationen der Curve mit F_1 dasselbe Vorzeichen haben sollte. Mithin kann das Integral weder ein Maximum noch ein Minimum sein, sobald die Integration von t_0 bis $t_1 + \tau'$ ausgedehnt wird. Da nun τ' positiv oder negativ sein, die auf t_0 folgende Nullstelle der Function $\Theta(t, t_0, \varepsilon)$ also sowohl unmittelbar vor t_1 als unmittelbar nach t_1 liegen kann, so können wir das Resultat folgendermassen aussprechen:

> Wenn das über die Curve $G = 0$ genommene Integral ein Maximum oder Minimum sein soll, so darf die Integration nicht von t_0 bis über t_1 hinaus erstreckt werden, sobald t_0, t_1 einander conjugirte Punkte sind. Im Allge-

meinen wird auch noch der Punkt t, selbst auszuschliessen sein; indessen lassen sich für den letzteren Fall allgemeine Criterien nicht aufstellen.

Capitel 9.

Es wird bewiesen, dass die in Cap. 7 gefundenen Criterien bei Voraussetzung gewisser specieller Variationen auch hinreichend sind.

Als notwendige Bedingungen für das Eintreten eines Maximums oder Minimums haben wir bisher die folgenden gefunden:

1.) Es mussten x und y als Functionen von t derart bestimmt werden, dass sie der Differentialgleichung $G=0$ genügten.

2.) Längs der so bestimmten Curve durfte die Function F_1, für ein Maximum nicht positiv, für ein Minimum nicht negativ sein. Allerdings konnte hierbei der Fall, dass $F_1 = 0$ ist, allgemein nicht behandelt werden, sondern musste vorkommenden Falls einer speciellen Untersuchung überlassen bleiben.

3.) Die Integration durfte sich von einem Punkte t_0 aus höchstens bis zu dessen conjugirten Punkte, sicher aber nicht über

denselben hinaus erstrecken.

Die letzteren aus der Betrachtung der zweiten Variation abgeleiteten Bedingungen bedürfen aber noch, wie am Schlusse des 7. Capitels bemerkt worden ist, einiger Ergänzungen. Einmal nämlich ist noch der Beweis zu führen, dass das Vorzeichen der vollständigen Variation thatsächlich mit dem der zweiten übereinstimmt, wenn für ξ und η die allgemeinsten unter denjenigen speciellen Variationen, für welche die bisherigen Entwickelungen überhaupt gelten, gewählt werden; sodann bleibt noch zu untersuchen, ob und in wie weit die gefundenen Criterien Giltigkeit behalten in dem Falle, dass die Curve ganz willkürlich variirt wird.

Ehe wir den Beweis des ersteren Punktes geben, müssen wir noch eine Eigenschaft der ursprünglichen Curve ableiten, welche für das Folgende von wesentlicher Bedeutung ist. Wir beschränken uns dabei auf einen Teil der Curve, innerhalb dessen die Tangente sich stetig ändert und setzen voraus, dass

innerhalb dieses Stückes F_1 weder gleich 0 noch gleich ∞ werde. Setzen wir zur Abkürzung:

$$1.)\quad H(x, y, x', y') = \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \cdot \partial x'}$$

so nimmt die Gleichung $G = 0$ die Gestalt an:

$$2.)\quad G = F_1\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right) + H(x, y, x', y') = 0$$

Unter der unabhängigen Grösse t, die ja willkürlich gewählt werden kann, wollen wir den vom Anfangspunkte der Curve gerechneten Bogen verstehen; dann ist:

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

und daher

$$x'\frac{dx'}{dt} + y'\frac{dy'}{dt} = 0$$

Hieraus folgt nun in Verbindung mit Gleichung 2.)

$$3.)\quad F_1\frac{dx'}{dt} - y'H = 0$$

$$F_1\frac{dy'}{dt} + x'H = 0$$

Da nun F_1 nirgends verschwindet und F_1 ebenso wie H eine stetige Function von x, y, x', y' ist, so ergiebt sich hieraus, dass $\frac{dx'}{dt}$ und $\frac{dy'}{dt}$ nirgends unendlich gross werden können, sondern

stetige Functionen des Bogens sind. Dies ist aber ein Zeichen dafür, dass die Curve innerhalb des betrachteten Curvenstückes keine singulären Punkte hat, ihre Krümmung also in keinem Punkte unendlich gross werden kann. Hiervon überzeugt man sich jedoch auch auf folgende Weise: Es sei für irgend einen Wert τ_0 von t der zugehörige Punkt der Curve x_0, y_0; dann lässt sich in Folge der Gleichungen 3) in der Nähe dieses Punktes die Curve darstellen durch die Gleichungen:

$$x = x_0 + A(t-\tau_0)^{\mu} + \dots$$

$$y = y_0 + B(t-\tau_0)^{\mu} + \dots,$$

worin A und B nicht gleichzeitig verschwinden. – Da nun x'^2 und $y'^2 = 1$ ist, so folgt:

$$1 = \mu^2(A^2+B^2)(t-\tau_0)^{2\mu-2} + A_1(t-\tau_0)^{2\mu-1} + \dots$$

und da diese Gleichung bestehen muss für alle Punkte in der Nähe von x_0, y_0, so ergiebt sich hieraus, dass alle $A_1, A_2, \dots$ verschwinden, ferner dass $\mu = 1$ und $A^2 + B^2 = 1$ ist. Es stellen sich daher die Coordinaten jedes in der Nähe von x_0, y_0 gelegenen Punktes der Curve durch reguläre Functionen des Bogens folgendermassen dar:

$$x = x_0 + A(t-\tau_0) + \dots$$

$$y = y_0 + B(t-\tau_0) + \dots,$$

worin A und B nicht gleichzeitig verschwinden, und da dies für jeden Punkt x_0, y_0 giebt, so folgt, dass die Curve keine singulären Punkte haben kann. Es können daher z. B. x' und y' nicht gleichzeitig verschwinden.

Nunmehr wollen wir zu dem angekündigten Beweis selbst übergehen. Wir haben bei unseren bisherigen Untersuchungen stets vorausgesetzt, dass $\xi, \eta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}$ hinlänglich kleine Grössen seien; denn nur unter dieser Annahme kann man die rechte Seite der Gleichung 2. pag. nach Potenzen dieser Grössen entwickeln. Es bedeutet dies, dass nicht nur die variirte Curve der ursprünglichen unendlich nahe liegen soll, sondern dass auch die Richtungen beider Curven in entsprechenden Punkten nur wenig von einander verschieden seien. Diese Voraussetzung behalten wir auch jetzt vorläufig noch bei; wir beschränken uns also immer noch auf specielle Variationen und beweisen zunächst, dass für alle diese Variationen das Vorzeichen der vollstän-

digen Variation des Integrals mit dem den zweiten übereinstimmend, so dass für diese die gefundenen Criterien auch hinreichend sind. Wir setzen jedoch nicht mehr voraus, dass diese Variationen in der Form $\varkappa\xi$, $\varkappa\eta$ darstellbar seien, wo $\varkappa$ eine beliebig kleine Grösse bezeichnet.

Da die Krümmung der ursprünglichen Curve in keinem Punkte unendlich gross ist, da ferner die ursprüngliche und die variirte Curve in entsprechenden Punkten nur wenig in der Richtung ihrer Tangenten und in ihrer Lage von einander abweichen sollen, so können beide Curven in eindeutiger Weise dadurch auf einander bezogen werden, dass jedem Punkte der ursprünglichen Curve der Punkt der variirten zugeordnet wird, in welchem letztere von der in diesem jenem Punkte an erstere gezogenen Normalen getroffen wird. Nun ist die Gleichung der Normalen in dem Punkte x, y

$$(X - x)\,x' + (Y - y)\,y' = 0$$

und da nach dem eben Bemerkten der Punkt $x + \xi$, $y + \eta$ in dieser Normalen

liegen soll, so folgt:

$$\xi x' + \eta y' = 0$$

Verbinden wir diese Gleichung mit der Definition von w:

$$w = \xi y' - \eta x',$$

so ergiebt sich, dass die Variationen in der Form:

$$4.)\quad \xi = \frac{w}{x'^2 + y'^2}\, y', \quad \eta = -\frac{w}{x'^2 + y'^2}\, x'$$

darstellbar sind. Hierin ist jetzt $\frac{w}{x'^2 + y'^2}$ eine unendlich kleine Grösse, welche sich mit t stetig ändert; ebenso ist die Ableitung nach t eine unendlich kleine Grösse, welche aber nicht überall stetig sein muss.

Unter der Voraussetzung nun, dass ξ, η, $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$ hinreichend kleine Grössen sind, kann man die vollständige Variation des Integrals:

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ F\left(x+\xi, y+\eta, x' + \frac{d\xi}{dt}, y' + \frac{d\eta}{dt}\right) - F(x, y, x', y') \right\} dt$$

nach Potenzen von ξ, η $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$ entwickeln und wenn man hierzu den Taylor'schen Lehrsatz in der Form benutzt:

$$F(x_1 + \xi_1, \dots x_n + \xi_n) = F(x_1, \dots x_n) + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}\, \xi_\alpha$$

$$+ \int_0^1 (1-\varepsilon)\, d\varepsilon \sum_{\alpha,\beta} F_{\alpha\beta}(x_1 + \varepsilon\xi_1, \dots x_n + \varepsilon\xi_n)\, \xi_\alpha \xi_\beta$$

wo $F_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_\alpha \cdot \partial x_\beta}$ ist, so erhält man, da in unserem Falle die Glieder erster Dimension verschwinden, eine Entwicklung von der Form:

$$5)\quad \Delta J = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 (1-\varepsilon)\left\{F_{11}\left(x+\varepsilon\xi, y+\varepsilon\eta, x'+\varepsilon\frac{d\xi}{dt}, y'+\varepsilon\frac{d\eta}{dt}\right)\xi^2 + \cdots\right\} d\varepsilon\, dt$$

Entwickelt man ferner F_{11} etc. nach Potenzen von ε, so wird das Aggregat der von ε freien Glieder identisch mit $\delta^2 J$. Führt man die Integration nach ε aus, so kann man die übrigen Glieder darstellen als eine quadratische Form von $\xi, \eta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}$, deren Coefficienten selbst noch diese Grössen enthalten und zwar so, dass sie mit diesem zugleich unendlich klein werden. Setzt man hierauf in ΔJ für ξ und η die Werte 4.) und für $\frac{d\xi}{dt}$ und $\frac{d\eta}{dt}$ die daraus folgenden Werte:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{y'}{x'^2+y'^2}\frac{dw}{dt} + w\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'^2+y'^2}\right)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{x'}{x'^2+y'^2}\frac{dw}{dt} - w\frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{x'^2+y'^2}\right)$$

ein, so nimmt ΔJ die Gestalt an:

$$\Delta J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(F_1\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + F_2 w^2\right)dt + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(f w^2 + 2 g w \frac{dw}{dt} + h\left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right)dt$$

worin f, g, h Functionen bedeuten, die selbst noch w und $\frac{dw}{dt}$ enthalten, aber so, dass sie mit diesen unendlich klein werden. Es kann nun nach

einem bekannten Satze die quadratische Form $f w^2 + 2 g w \frac{dw}{dt} + h \left(\frac{dw}{dt}\right)^2$ stets in reeller Weise durch lineare Substitutionen auf die Form gebracht werden

$$f_1 u_1^2 + f_2 u_2^2$$

derart, dass gleichzeitig die Gleichung besteht

$$u_1^2 + u_2^2 = w^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2$$

und es sind dabei f_1 und f_2 die Wurzeln der Gleichung für λ:

$$(f - \lambda)(h - \lambda) - g^2 = \lambda^2 - \lambda(f + h) + fh - g^2 = 0$$

Da die Coefficienten in dieser Gleichung mit w und $\frac{dw}{dt}$ gleichzeitig unendlich klein werden, so muss dasselbe auch von f_1 und f_2 den Wurzeln dieser Gleichung gelten. Ferner kann man, wenn l einen Mittelwert zwischen f_1 und f_2 ist, der also ebenfalls mit w und $\frac{dw}{dt}$ unendlich klein wird, die Function $f_1 u_1^2 + f_2 u_2^2$ auf die Form bringen:

$$f_1 u_1^2 + f_2 u_2^2 = l\,(u_1^2 + u_2^2) = l\left(w^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right)$$

und mithin erhalten wir für ΔJ den Ausdruck:

$$\Delta J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(F_1\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + F_2\, w^2\right) dt + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} l\left(w^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right) dt$$

oder endlich:

$$\Delta J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left\{(F_1 + l)\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + (F_2 + l)\, w^2\right\} dt$$

und hiermit haben wir die vollständige Varia-

tion genau in derselben Form erhalten, wie früher die zweite Variation $\delta^2 J$. – Wir setzen nun voraus, dass die notwendigen Bedingungen für die Existenz eines Maximums oder Minimums erfüllt seien, das F_1 also längs der ganzen Curve $G = 0$ von 0 und ∞ verschieden und unveränderlichen Vorzeichens bleibe und dass sich eine Function u bestimmen lasse, welche die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{du}{dt}\right) - F_2\, u = 0$$

befriedigt und weder an den Grenzen des Intervalles $t_0 \ldots t_1$ noch innerhalb desselben verschwindet. Verstehen wir dann unter κ eine positive Constante und setzen:

$$l = -\kappa + l + \kappa$$

so geht ΔJ über in:

$$\Delta J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left\{(F_1 - \kappa)\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + (F_2 - \kappa)\, w^2\right\} dt + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(l+\kappa)\left(\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + w^2\right) dt$$

Hat man nun κ fixirt, so wählt man ξ und η so klein, dass der absolute Betrag der von ihnen abhängigen Grösse l kleiner wird als κ; dann ist $l + \kappa$ positiv und mithin auch das zweite Integral in vorstehender Gleichung. Es ist also nur noch zu zeigen, dass κ so gewählt werden kann, dass auch das erste Integral positiv wird,

wenn F_1 positiv ist. Nach dem pag. 196 citirten Satze ist es nun immer möglich, sobald die Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{du}{dt}\right) - F_2 u = 0$$

durch eine stetige Function u von t integrirt ist, welche innerhalb der Grenzen und an den Grenzen des Intervalles $t_0 \dots t_1$ nirgends verschwindet, auch die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\left((F_1 - \kappa)\frac{d\bar{u}}{dt}\right) - (F_2 - \kappa)\,\bar{u} = 0$$

durch eine stetige Function $\bar{u}$ von t zu integriren, welche wenn κ eine gewisse Grenze nicht übersteigt, während ihres ganzen Verlaufs nur unendlich wenig von u abweicht, also darstellbar ist in der Form:

$$\bar{u} = u + (t, \kappa),$$

wo (t, κ) für alle in Betracht kommenden Werte von t mit κ zugleich unendlich klein wird. Auch diese Function $\bar{u}$ wird deshalb im Intervalle $t_0 \dots t_1$ nirgends verschwinden. Hierdurch ist für κ allerdings eine gewisse Grenze festgesetzt, die es nicht überschreiten darf; aber wenn auch noch die Bestimmung hinzukommt, dass κ so klein sein muss, dass $F_1 - \kappa$ mit F_1 sein Vorzeichen gemein hat, so können ξ und η immer doch

noch so klein gewählt werden, dass $|l| < k$ wird. Alsdann lässt sich das erste Integral in ΔJ auf dieselbe Weise umformen, wie das Integral 8.) pag. 161 in das Integral 14 pag. 173 transformirt wurde, und es ergiebt sich für ΔJ der Ausdruck:

$$\Delta J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(F_1 - k)\left(\frac{dw}{dt} - \frac{d\bar{u}}{dt}\,\frac{w}{\bar{u}}\right)^2 dt + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(l+k)\left(\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + w^2\right)dt$$

welcher zeigt, dass ΔJ für alle unendlich kleinen Variationen der Curve von der angegebenen Beschaffenheit positiv ist, wenn F_1 positiv ist. Ist F_1 negativ, so bleiben die übrigen Bestimmungen über k; nur wird dann k negativ und $|l| < -k$ gewählt, es werden dann beide Integrale negativ, mithin ΔJ selbst negativ. Damit ist dann die ausgesprochene Behauptung erwiesen und das folgende Resultat gefunden:

Wenn in der Strecke $t_0 \ldots t_1$ die aus der Betrachtung der zweiten Variation des Integrals abgeleiteten notwendigen Bedingungen für die Existenz eines Maximums oder Minimums erfüllt sind, so wird für alle Variationen der Curve, welche so gewählt sind, dass nicht nur die Abstände entsprechender Punkte der ursprüngli-

chen und der variirten Curve hinreichend klein sind, sondern auch die Richtungen beider Curven in ensprechenden Punkten beliebig wenig von einander abweichen, das Vorzeichen der vollständigen Variation mit dem der zweiten Variation übereinstimmen.

Es wird also das Integral wirklich ein Maximum oder Minimum sein, je nachdem die Grösse F_1 längs der Strecke $t_0 \ldots t_1$ beständig negativ oder beständig positiv ist.

Damit ist die Untersuchung bis zu dem Punkte geführt, bis zu dem sie von Andern überhaupt jemals geführt worden ist; es bleibt nur noch übrig, was ohne Einfluss auf die Theorie selbst ist. Wir wollen je die geometrische Veranschaulichung der conjugirten Punkte nachzutragen, wie sie von Jacobi angegeben ist. Wir wollen jedoch dieses noch verschieben, um zunächst im folgenden Capitel eine Anwendung der gefundenen Criterien auf die drei bereits im 6ten Capitel begonnenen Probleme zu geben.

Capitel 10.

Anwendung der gefundenen Criterien auf die Beispiele I, II III in Cap. 4, im Anschluss an Cap. 6.

Aufgabe I. Das Problem der kleinsten Rotationsfläche.

Als Lösung der Gleichung $G = 0$ ergaben sich in Cap. 6 die simultanen Gleichungen der Kettenlinie:

$$x = g + ct = \varphi(t, \alpha, \beta)$$

$$1.)\quad y = \frac{c}{2}(e^{t} + e^{-t}) = \psi(t, \alpha, \beta)$$

Die Constanten α und β sind also hier resp. gleich g und c, wo hier g an die Stelle des in Gl. 8) pag. auftretenden x_0 gesetzt ist. Wir haben hier also:

$$2.)\quad \varphi'(t) = c \qquad \varphi_1(t) = 1, \qquad \varphi_2(t) = t$$

$$\psi'(t) = \frac{c}{2}(e^{t} - e^{-t}), \quad \psi_1(t) = 0, \quad \psi_2(t) = \frac{1}{2}(e^{t} + e^{-$$

und hiernach

$$3.)\quad \vartheta_1(t) = \psi'(t)\varphi_1(t) - \varphi'(t)\psi_1(t) = \frac{c}{2}(e^{t} - e^{-t}) =$$

$$\vartheta_2(t) = \psi'(t)\varphi_2(t) - \varphi'(t)\psi_2(t) = t\frac{c}{2}(e^{t} - e^{-t}) - \frac{c}{2}($$

$$= t y' - y$$

Sind nun x_0, y_0, x_0', y_0' die dem Werte t_0

entsprechenden Werte von x, y, x', y', so ist:

$$\Theta(t, t_0) = \vartheta_1(t_0)\vartheta_2(t) - \vartheta_2(t_0)\vartheta_1(t) = y_0'(ty' - y) - (t_0 y_0' - y_0)y'$$

oder, da man hat

$$t = \frac{x - g}{c}, \quad t_0 = \frac{x_0 - g}{c}, \quad c = x' = x_0',$$

$$4.) \quad \Theta(t, t_0) = \frac{1}{c}\left[y_0'(xy' - yx') - y'(x_0 y_0' - y_0 x_0') \right]$$

Um den zu t_0 conjugirten Punkt zu finden, hätte man hierin für x, y, x', y' ihre Werte in t einzusetzen und dann die Gleichung $\Theta(t, t_0) = 0$ aufzulösen; allein man kann diese etwas complicirte Rechnung durch eine geometrische Interpretation der Gleichung $\Theta(t, t_0) = 0$ umgehen. Es ist nämlich die Gleichung der Tangente der Kettenlinie im Punkte x_0, y_0:

$$y_0'(X - x_0) - x_0'(Y - y_0) = 0$$

und daher trifft diese Tangente die Abscissenachse in dem durch die Gleichung bestimmten Punkte:

$$y_0' X_0 = x_0 y_0' - y_0 x_0'.$$

Überhaupt ist die Abscisse des Punktes in welchem eine beliebige Tangente der Kettenlinie die Abscissenachse schneidet, bestimmt durch

$$y' X = xy' - yx'.$$

Soll nun der Punkt x, y dem Punkte x_0, y_0 conjugirt sein, so müssen seine Coordinaten

die Gleichung $\Theta(t, t_0) = 0$ oder die Gleichung

$$y'_0(xy' - yx') - y'(x_0 y'_0 - y_0 x'_0) = 0$$

befriedigen, d. h. es muss sein:

$$y'_0 y'(X - X_0) = 0$$

oder da nach pag. y' und y'_0 nicht verschwinden

$$X = X_0$$

Zwei conjugirte Punkte der Kettenlinie besitzen also die Eigenschaft, dass die durch sie an die Kettenlinie gezogenen Tangenten sich auf der Abscissenachse schneiden. Diese Relation bietet ein einfaches Mittel, zu einem willkürlichen Punkte den zu ihm conjugirten geometrisch zu construiren.

Es ist ferner:

$$F_1 = \frac{y}{\sqrt{x'^2 + y'^2}^{\,3}}$$

und da nach pag. hier y stets positiv und x', y' nicht gleichzeitig verschwinden können, so ist F_1 beständig positiv und von 0 und ∞ verschieden. Es erzeugt daher die Kettenlinie innerhalb zweier einander conjugirten Punkte in der That bei ihrer Rotation um die Abscissenachse eine Fläche von kleinstem Flächeninhalt; zugleich ersieht man hieraus, wie wenig hier die Bedin-

-gung über F_1 ausgereicht hätte, um die Existenz eines Minimums strenge nachzuweisen.

Aufgabe II.

Problem der Brachistochrone.

Bei diesem Probleme ergab sich für F_1 der Ausdruck:

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{(x'^2 + y'^2)}^3} \qquad \frac{1}{\sqrt{4gy + \alpha^2}}$$

Wir hatten aus gewissen Gründen von vornherein vorausgesetzt, dass zwischen den Punkten A und B der Curve kein Rückkehrpunkt, d.h. kein Punkt vorhanden sein solle, für welchen x' und y' beide gleich 0 sind. Für einen solchen Bogen der Curve ist dann F_1 beständig positiv und von 0 und ∞ verschieden, da die in F_1 vorkommenden Quadratwurzeln beständig positiv und stets endlich sind. Die Lösung der Gleichung $G = 0$ hatten wir in der Form erhalten:

$$x = g + r\,(t - \sin t) = \varphi(t, \alpha, \beta)$$

$$2.)\quad y + a = r\,(1 - \cos t) = \psi(t, \alpha, \beta)$$

wo jetzt nur g und r statt $-x_0$ und $\frac{1}{2}c^2$ (cfr. 10. pag.) gesetzt sind. a ist eine gegebene andere Constante, welche durch die Anfangsgeschwindig-

keit bestimmt ist. Hier ist nun:

$$\varphi'(t) = r(1-\cos t),\quad \psi_1(t) = 1,\quad \psi_2(t) = t - \sin t.$$

$$\varphi'(t) = r \sin t,\quad \psi_1(t) = 0,\quad \psi_2(t) = 1 - \cos t.$$

3.) $$\vartheta_1(t) = r \sin t$$

$$\vartheta_2(t) = r \sin t\,(t - \sin t) - r(1-\cos t)^2 = 2r \sin\frac{t}{2}\left(t\cos\frac{t}{2} - 2\sin\frac{t}{2}\right)$$

Mithin ist

4.) $$\Theta(t, t_0) = 4r^2 \sin\frac{t_0}{2} \sin\frac{t}{2}\left\{\cos\frac{t_0}{2}\left(t\cos\frac{t}{2} - 2\sin\frac{t}{2}\right) - \cos\frac{t}{2}\left(t_0\cos\frac{t_0}{2} - 2\sin\frac{t_0}{2}\right)\right\}$$

Bei der angenommenen Lage von A und B sind nun t_0 sowie t und 0 und 2π verschieden, mithin hat die Gleichung für die Bestimmung des zu t_0 conjugirten Punktes die Gestalt:

5.) $$\cos\frac{t_0}{2}\left\{t\cos\frac{t}{2} - 2\sin\frac{t}{2}\right\} - \cos\frac{t}{2}\left\{t_0\cos\frac{t_0}{2} - 2\sin\frac{t_0}{2}\right\}$$

oder

6.) $$t - 2\,\mathrm{tg}\,\frac{t}{2} = t_0 - 2\,\mathrm{tg}\,\frac{t_0}{2}$$

Dies ist wieder eine transcendente Gleichung zur Bestimmung von t, indessen überzeugt man sich sehr leicht, dass sie ausser $t = t_0$ in dem Intervalle $0 \ldots 2\pi$ keine reellen Wurzeln weiter zulässt. Da nämlich die Ableitung von $t - 2\,\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}$, nämlich $1 - \frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}$, beständig negativ ist, so muss $t - 2\,\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}$ beständig abnehmen, wenn t von t_0 abwächst und kann daher niemals wieder den Wert $t_0 - 2\,\mathrm{tg}\,\frac{t_0}{2}$ annehmen. Mithin giebt es auch zum Punkte t_0 auf dem Curvenbogen, auf dem t_0 liegt, keinen

conjugirten Punkt und es besitzt daher jeder Bogen der Cycloide zwischen zwei Spitzen die Eigenschaft, dass ein auf ihm fallender materieller Punkt in der kürzesten Zeit von einem Punkte A nach einem Punkte B desselben hingelangt. Hier hätte also die Bedingung $F_1 > 0$ hingereicht, um die Existenz eines Minimums zu erweisen. Auf den Fall, wo die Anfangsgeschwindigkeit gleich 0 ist, also der Punkt A in der Spitze selbst liegt, werden wir später noch zurückkommen.

Aufgabe III

Problem der kürzesten Linie auf einer Kugelfläche.

Bei diesem Probleme erhält man für F_1 den Ausdruck:

$$1.)\quad F_1 = \frac{\sin^2 u}{\sqrt{(u'^2 + v'^2 \sin^2 u)^3}}$$

Dieselbe kann nicht unendlich gross werden, da bewiesenermassen u' und v' nicht gleichzeitig verschwinden können. Dagegen verschwindet F_1, wenn $\sin u = 0$, also $u = 0$ oder $= \pi$ wird. Mithin müssten wir in diesem Falle das Coordinatensystem so wählen, dass u im Verlaufe der Curve nirgends $= 0$ oder $= \pi$ wird. Ist das geschehen, so wird

F. für die ganze Strecke von A bis B positiv und wird weder 0 noch ∞. Die Gleichung $G = 0$ lieferte nun einen grössten Kreis, dessen Gleichungen waren:

$$\cos u = \cos c \cdot \cos(s-\beta) \quad \cot g(v-\beta) = \sin c \cdot \cot g(s-b)$$

oder:

$$u = \arccos(\cos c \cos(s-b)) = \varphi(s, c, \beta)$$

$$v = \beta + \operatorname{cosec} g(\sin c \cot g(s-b)) = \psi(s, c, \beta)$$

Hiernach ist nun:

$$\varphi'(s) = \frac{\cos c \sin(s-b)}{\sqrt{1-\cos^2 c \cos^2(s-b)}}, \quad \varphi_1(s) = \frac{\sin c \cdot \cos(s-b)}{\sqrt{1-\cos^2 c \cos^2(s-b)}}$$

$\varphi_2(s) = 0$

$$\psi'(s) = \frac{\sin c}{1-\cos^2 c \cos^2(s-b)}, \quad \psi_1(s) = -\frac{\cos c \sin(s-b)\cos(s-b)}{1-\cos^2 c \cos^2(s-b)} \quad \psi_2(s) = 0$$

$$\vartheta_1(s) = \frac{\cos(s-b)}{\sqrt{1-\cos^2 c \cos^2(s-b)}} \quad \vartheta_2(s) = -\frac{\cos c \sin(s-b)}{\sqrt{1-\cos^2 c \cos^2(s-b)}}$$

Darnach ist, weil für den Punkt A $s = s_0 = 0$ sein sollte:

$$3.)\quad \Theta(s, s_0) = -\frac{\cos 0 \cdot \sin s}{\sqrt{1-\cos^2 0 \cdot \cos^2 b}\,\sqrt{1-\cos^2 c \cdot \cos^2(s-b)}}$$

Um nun den zum Punkte $s_0 = 0$ conjugirten Punkt zu finden, haben wir die Gleichung $\Theta(s, s_0) = 0$ nach s aufzulösen. Da aber der Nenner des vorstehenden Ausdrucks nicht unendlich gross werden kann, so ist der conjugirte Punkt aus der Gleichung $\sin s = 0$ zu bestimmen. Es ist also

$s = \pi$ der zu $s = 0$ conjugirte Punkt; d. h. der zu A conjugirte Punkt ist der andere Endpunkt des durch A gezogenen Kugeldurchmessers. Ein grösster Kreis zwischen den Punkten A und B, gemessen in der als positiv festgesetzten Richtung ist daher nur dann deren kürzeste Entfernung auf der Kugeloberfläche, wenn diese Punkte um weniger als $180°$ von einander entfernt sind, ein Resultat, das geometrisch von vornherein klar ist. Übrigens bemerke man, dass die Bedingung: F dürfe nicht verschwinden, in diesem Falle offenbar nicht nötig ist. Denn der grösste Kreis muss seine Minimaleigenschaft unabhängig von der Wahl des Coordinatensystems besitzen, bei der etwa F in einem Punkte der Curve verschwindet.

Capitel 11.

Geometrische Bedeutung der conjugirten Punkte.

Von dem Curvenstücke, für welches das betrachtete Integral ein Maximum oder Minimum sein sollte, haben wir vorausgesetzt, dass für alle Punkte desselben $F(x, y, x', y')$ eine reguläre Function von x, y, x', y' sein und F_1 längs derselben nicht Null und nicht unendlich werden sollte. Ausnahmen hiervon wurden der besonderen Untersuchung überlassen. Hieraus ergab sich im Verein mit den notwendigen Bedingungen, dass das Curvenstück keine singulären Punkte enthalten kann.

Ein solches Curvenstück besitzt daher in jedem Punkte nur eine einzige Normale, welche die Curve schneidet und die Krümmungsradien aller Punkte haben eine untere von Null verschiedene Grenze. Somit kann man auf jeder Seite der Normale in einem Punkte C der Curve zwei Punkte D und D' bestimmen von der

Beschaffenheit, dass die Normale innerhalb der Strecke $D^0 D^1$ von keiner anderen, hinreichend nahe bei der C errichteten Normale der Curve geschnitten wird. Denkt man sich die Strecke $D^0 D^1$ für die Normale eines jeden Punktes construirt, so wird durch die aufeinanderfolgenden Punkte ein Flächenstück begrenzt, welches die Curve vollständig einhüllt und die Eigenschaft besitzt, dass zwei Normalen der Curve, welche nur hinreichend nahe bei einander liegen, sich nicht innerhalb desselben schneiden.

Diese Curve A B werde nun dargestellt durch die Gleichungen:

1.) $x = \varphi(t, \alpha, \beta) \quad y = \psi(t, \alpha, \beta) \quad t = t_0 \ldots t_1$

und eine dieser benachbarte ebenfalls der Differentialgleichung $G = 0$ genügende Curve durch:

2.) $\bar{x} = \varphi(t, \alpha + \alpha', \beta + \beta') \quad \bar{y} = \psi(t, \alpha + \alpha', \beta + \beta')$

Beide Curven sollen durch denselben Punkt A gehen. Während nun für die erste Curve dem Punkte A ein bestimmter Wert t_0 von t entspricht, wird für die zweite Curve demselben Punkte ein anderer Wert $t_0 + \tau'$ zugehören. Die Bedingung, dass die zweite Curve die erste in A schneidet,

wird durch die beiden Gleichungen ausgedrückt:

$$3.)\quad \varphi(t_0+\tau', \alpha+\alpha', \beta+\beta') - \varphi(t_0, \alpha, \beta) = 0$$

$$\psi(t_0+\tau', \alpha+\alpha', \beta+\beta') - \psi(t_0, \alpha, \beta) = 0$$

oder entwickelt nach Potenzen von τ', α', β':

$$4.)\quad \varphi'(t_0)\tau' + \varphi_1(t_0)\alpha' + \varphi_2(t_0)\beta' + (\ldots)_2 = 0$$

$$\psi'(t_0)\tau' + \psi_1(t_0)\alpha' + \psi_2(t_0)\beta' + (\ldots)_2 = 0$$

Um diese Gleichungen nach τ', α', β' aufzulösen, sei ein Satz aus der allgemeinen Functionstheorie erwähnt, welcher lautet:

Vorausgesetzt, dass in den Gleichungen:

$$a x + b y + c z + (x, y, z)_2 = 0$$

$$a' x + b' y + c' z + (x, y, z)_2 = 0$$

nicht alle drei Grössen $ab' - ba'$, $bc' - cb'$, $ca' - ac'$ Null sind, kann man alle Wertsysteme x, y, z welche den beiden Gleichungen genügen, und in denen x, y, z eine gewisse Grenze nicht überschreiten, durch drei Potenzreihen einer einzigen Grösse darstellen. Für diese Grösse kann man z. B. annehmen:

$$s = c_1 x + c_2 y + c_3 z,$$

wo c_1, c_2, c_3 der einzigen Bedingung genügen müssen, dass:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. – Setzt man nun zur Abkürzung:

$$\psi_1(t_0)\varphi_2(t_0) - \varphi_1(t_0)\psi_2(t_0) = \mathfrak{D}_3(t_0),$$

so werden die den Determinanten

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$$

entsprechenden Ausdrücke in unserem Falle dargestellt durch:

$$\begin{aligned} &\varphi'(t_0)\,\psi_1(t_0) - \psi'(t_0)\,\varphi_1(t_0) = -\vartheta_1(t_0) \\ 5.)\quad &\varphi'(t_0)\,\psi_2(t_0) - \psi'(t_0)\,\varphi_2(t_0) = -\vartheta_2(t_0) \\ &\varphi_1(t_0)\,\psi_2(t_0) - \psi_1(t_0)\,\varphi_2(t_0) = -\vartheta_3(t_0), \end{aligned}$$

von denen wenigstens $\vartheta_1(t_0)$ und $\vartheta_2(t_0)$ nicht gleichzeitig verschwinden können, wie pag. gezeigt wurde. Setzt man daher:

$$c_2\,\alpha' + c_3\,\beta' = k_1, \quad c_1 = 0$$

und verfügt man über die Constanten c_2 und c_3 so, dass die Determinante

$$6.)\quad \begin{vmatrix} \varphi'(t_0) & \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) \\ \psi'(t_0) & \psi_1(t_0) & \psi_2(t_0) \\ 0 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = c_2\,\vartheta_2(t_0) - c_3\,\vartheta_1(t_0) = 1$$

wird, was nach dem Vorhergehenden stets möglich ist, so erhält man, wenn man die Gleichung auf ihre linearen Glieder reducirt, durch Auflösung der Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varphi'(t_0)\,\tau' + \varphi_1(t_0)\,\alpha' + \varphi_2(t_0)\,\beta' &= 0 \\ \psi'(t_0)\,\tau' + \psi_1(t_0)\,\alpha' + \psi_2(t_0)\,\beta' &= 0 \\ c_2\,\alpha' + c_3\,\beta' &= k_1 \end{aligned}$$

als erste Annäherung für τ; α', β' die Werte

$$\tau = -\kappa_1\ \vartheta_3(t_0)$$

7.) $$\alpha' = +\kappa_1\ \vartheta_2(t_0)$$

$$\beta' = -\kappa_1\ \vartheta_1(t_0)$$

und daher schliesslich:

$$\tau' = -\kappa_1\ \vartheta_3(t_0) + \kappa_1^2\ \mathfrak{P}_1(\kappa_1)$$

$$\alpha' = \kappa_1\ \vartheta_2(t_0) + \kappa_1^2\ \mathfrak{P}_2(\kappa_1)$$

$$\beta' = -\kappa_1\ \vartheta_1(t_0) + \kappa_1^2\ \mathfrak{P}_3(\kappa_1)$$

Setzt man nun diese Ausdrücke in 2. oder, was dasselbe ist, in

$$\bar{x} = \varphi(t + t', \alpha + \alpha', \beta + \beta')$$

$$\bar{y} = \psi(t) + \tau', \alpha + \alpha', \beta + \beta')$$

wo jetzt t auch von t_0 ab zunimmt, ein, so ergiebt sich:

$$\bar{x} = x - \kappa_1 \{ \varphi'(t)\,\vartheta_3(t_0) - \varphi_1(t)\,\vartheta_2(t_0) + \varphi_2(t)\,\vartheta_1(t_0) \} + \kappa_1(t, \kappa_1)$$

$$\bar{y} = y - \kappa \{ \psi'(t_0)\,\vartheta_3(t_0) - \psi_1(t)\,\vartheta_2(t_0) + \psi_2(t)\,\vartheta_1(t_0) \} + \kappa_1(t, \kappa_1)$$

worin (t, κ_1) eine Grösse bedeutet, die für jeden Wert von t mit κ_1 zugleich unendlich klein wird. Für $\kappa_1 = 0$ geht diese Curve in die ursprüngliche über und man sieht, dass die beiden Curven in einander entsprechenden Punkten, d.h. solchen, die demselben Wert von t angehören, einander so nahe kommen, als man will.

Dass man auf diese Weise alle den Diffe-

rentialgleichung $\mathcal{G}=0$ genügende Curven, welche durch den Punkt A gehen, und der ersten benachbart sind, erhalten kann, ist hierdurch noch nicht unmittelbar bewiesen. klar. Doch ergiebt sich dies auf folgende Weise: Statt K_1 hätten wir auch eine Potenzreihe von τ', α', β' wählen können, welche nur die Bedingung zu befriedigen braucht, dass, wenn c_1, c_2, c_3 die Coefficienten der in τ', α', β' linearen Glieder sind, die Determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi'(t_0) & \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) \\ \psi'(t_0) & \psi_1(t_0) & \psi_2(t_0) \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

von 0 verschieden ist. Diese Eigenschaft besitzt aber die Potenzreihe, durch welche die trigonometrische Tangente des Winkels ausgedrückt wird, welchen die Anfangsrichtungen der beiden Curven im Punkte $A = t_0$ mit einander bilden. Bezeichnet man dieselbe mit $\varkappa_1$, so ist:

$$10.)\quad \frac{\varkappa = \bar{x}_0' y_0' - \bar{y}_0' x_0'}{x_0' \bar{x}_0' + y_0' \bar{y}_0'} = \frac{\begin{vmatrix} \varphi''(t_0) & \psi''(t_0) \\ \varphi'(t_0) & \psi'(t_0) \end{vmatrix} \tau' + \begin{vmatrix} \varphi_1'(t_0) & \psi_1'(t_0) \\ \varphi'(t_0) & \psi'(t_0) \end{vmatrix} \alpha' + \begin{vmatrix} \varphi_2'(t_0) & \psi_2'(t_0) \\ \varphi'(t_0) & \psi'(t_0) \end{vmatrix} \beta' + (\ldots)}{\varphi'^2(t_0) + \psi'^2(t_0) + (\tau', \alpha', \beta')},$$

Da vorausgesetzt wird, dass die Curve im Punkte

A regulär ist, so sind $\varphi'(t_0)$ und $\psi'(t_0)$ nicht gleichzeitig Null; es ist daher $\varphi'^2(t_0)$ von Null verschieden und daher die Determinante der linearen Glieder der Gleichungen 4.) und 10.) gleich:

$$\frac{1}{\varphi'^2(t_0)+\psi'^2(t_0)}\begin{vmatrix} \varphi'(t_0) & \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) \\ \psi'(t_0) & \psi_1(t_0) & \psi_2(t_0) \\ \begin{vmatrix} \varphi''(t_0) & \psi''(t_0) \\ \varphi'(t_0) & \psi'(t_0) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \varphi_1'(t_0) & \psi_1'(t_0) \\ \varphi'(t_0) & \psi'(t_0) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \varphi_2'(t_0) & \psi_2'(t_0) \\ \varphi'(t_0) & \psi'(t_0) \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Multiplicirt man hierin die erste Horizontalreihe mit $\psi''(t_0)$, die zweite mit $-\varphi''(t_0)$ und addirt dann beide zur dritten, so wird diese:

$$0,\ \begin{vmatrix} \varphi_1'(t_0) & \psi_1'(t_0) \\ \varphi'(t_0) & \psi'(t_0) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_1(t_0) & \psi_1(t_0) \\ \varphi''(t_0) & \psi''(t_0) \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} \varphi_2'(t_0) & \psi_2'(t_0) \\ \varphi'(t_0) & \psi'(t_0) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_2(t_0) & \psi_2(t_0) \\ \varphi''(t_0) & \psi''(t_0) \end{vmatrix}$$

oder was dasselbe ist:

$$0,\ \mathfrak{D}_1'(t_0)\ \ \mathfrak{D}_2'(t_0).$$

Mithin ist obige Determinante gleich

$$\frac{1}{\varphi'^2(t_0)+\psi'^2(t_0)}\left\{\mathfrak{D}_1'(t_0)\,\mathfrak{D}_2(t_0)-\mathfrak{D}_2'(t_0)\,\mathfrak{D}_1(t_0)\right\} = -\frac{1}{\varphi'^2(t_0)+\psi'^2(t_0)}\,\frac{c}{F_1(t_0)}$$

und letzterer Ausdruck ist nach pag. von Null verschieden. Daher können wir k einfach ~~an~~ an die Stelle von k_1 setzen und finden demnach ebenso wie früher

$$11.)\quad \bar{x} = x + k f_1(t,k),\ \bar{y} = y + k f_2(t,k)$$

Wir können nun zeigen, dass eine der Dif-

ferentialgleichung $G = 0$ genügende Curve vollkommen bestimmt ist, sobald ihr Anfangspunkt und die Richtung der Tangente in derselben gegeben ist. Nennen wir die Coordinaten eines Punktes A a, b und den Winkel, den die Anfangsrichtung mit der Abscissenachse bildet, λ und denken wir uns statt der Coordinaten x, y ein neues Coordinatensystem eingeführt; t, s, dessen Anfangspunkt in A liegt und dessen Abscissenachse mit der gegebenen Anfangsrichtung zusammenfällt, so ist

12.) $t = (x-a)\cos\lambda\ (y-b)\sin\lambda,\ s = (x-a)\sin\lambda + (y-b)\cos\lambda$

oder

13.) $x = a + t\cos\lambda + s\sin\lambda,\ y = b - t\sin\lambda + s\cos\lambda.$

Wählt man t als unabhängige Variable, so ist:

$$x' = \cos\lambda + \frac{ds}{dt}\sin\lambda, \quad \frac{dx'}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\sin\lambda$$

$$y' = -\sin\lambda + \frac{ds}{dt}\cos\lambda, \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\cos\lambda$$

daher:

$$x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt} = \frac{\partial^2 s}{dt^2}$$

Somit verwandelt sich die Gleichung $G = 0$ oder

$$F_1\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y . \partial x'} = 0$$

mit Benutzung der Abkürzung 1.) pag. in die folgende:

14.) $$0 = \frac{d^2s}{dt^2} F_1\left(a + t\cos\lambda + s\sin\lambda,\ b - t\sin\lambda + s\cos\lambda,\ \cos\lambda + \frac{ds}{dt}\sin\lambda,\right.$$
$$\left. -\sin\lambda + \frac{ds}{dt}\cos\lambda\right) + H\left(t, s\ \frac{ds}{dt}\right)$$

Diese Gleichung ist so zu integriren, dass für $t=0$ $s=0$ und $\frac{ds}{dt}=0$ wird. Besitzt nun F, $(a, b, \cos\lambda, -\sin\lambda)$ einen endlichen und von 0 verschiedenen Wert und wird H im Punkte A nicht unendlich gross, wie vorausgesetzt wurde, da ja F und somit auch seine Ableitungen, aus denen H besteht, reguläre Functionen sind, so giebt es eine und nur eine Potenzreihe von t, welche der Differentialgleichung genügt. Dieselbe besitzt daher die Form:

$$s = t^2 \mathfrak{P}(t).$$

Setzt man diesen Wert von t in die Ausdrücke für x und y in 13) ein:

$$15.)\quad \begin{aligned} x &= a + t\cos\lambda + A_1 t^2 + \ldots \\ y &= b - t\sin\lambda + B_1 t^2 + \ldots, \end{aligned}$$

so hat man auch x und y als Potenzreihen von t dargestellt, welche der Differentialgleichung $G=0$ genügen.

Dieses vorausgesetzt kann man für κ eine obere Grenze angeben derart, dass alle Curven, welche einem Werte unterhalb dieser Grenze angehören, und der Differentialgleichung $G=0$ genügen, vollständig in jener Fläche liegen, welche die ursprüngliche Curve einhüllt. Dies ermöglicht eine eindeutige Beziehung beider Curven

auf einander in der Weise, dass wir jedem Punkte der ursprünglichen Curve denjenigen der benachbarten zuordnen, in welchem diese von der in jenem Punkte an erstere gelegten Normale getroffen wird. – Sind x, y die Coordinaten eines Punktes P der ursprünglichen $x+\xi, y+\eta$ die des entsprechenden Punktes P' der benachbarten Curve, so ist

$$x+\xi = \varphi(t+\tau, \alpha+\alpha', \beta+\beta')$$
$$y+\eta = \psi(t+\tau, \alpha+\alpha', \beta+\beta')$$

und überdies müssen ξ, η die Gleichung erfüllen (cfr. pag.)

$$x'\xi + y'\eta = 0$$

Es sind somit ξ, η, τ durch die Gleichungen zu bestimmen

$$\xi = \varphi'(t)\tau + \varphi_1(t)\alpha' + \varphi_2(t)\beta' + \dots$$
$$\eta = \psi'(t)\tau + \psi_1(t)\alpha' + \psi_2(t)\beta' + \dots$$
$$0 = \varphi'(t)\xi + \psi'(t)\cdot\eta.$$

Aus der letzteren Gleichung erhält man mit Hilfe der beiden ersten:

$$17.)\quad 0 = (\varphi'^2(t) + \psi'^2(t))\tau + k\, f(t) + (t, k)$$

indem man für α', β' die obigen Potenzreihen 7^a) in k einsetzt. Da nun das Curvenstück AB keine singulären Punkte besitzt

also $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)$ nirgends verschwindet, so kann man hieraus τ und somit auch ξ und η als Potenzreihen von k darstellen.

Wenn man sich also auf Curven beschränkt, in welchen k unterhalb einer gewissen Grenze bleibt, so kann man immer den Punkt bestimmen, in welchem eine solche von irgend einer Normale der ursprünglichen getroffen wird. Wir fragen nun, ob es möglich ist, dass eine solche zweite Curve die erste jemals schneidet. Sollte dies der Fall sein, so muss die Strecke PP' verschwinden, d.h. es müssen ξ, η für irgend einen Wert von t gleich 0 sein; es muss daher möglich sein, die Grössen $t, \tau, \tau', \alpha', \beta'$ so zu wählen, dass zugleich die Gleichungen 4.) und 16.) wenn in den letzteren $\xi = 0$, $\eta = 0$ gesetzt wird, erfüllt sind. Diese Gleichungen können wir in folgender Form schreiben, da die Glieder gleicher Dimension in 4.) und 16.) homogene Functionen von τ', α', β' resp. τ, α', β' sind:

$$(\varphi'(t) + r)\,\tau' + (\varphi_1(t_0) + p)\,\alpha' + (\varphi_2(t_0) + q)\,\beta' = 0$$

$$(\psi'(t_0) + r_1)\,\tau' + (\psi_1(t_0) + p_1)\,\alpha' + (\psi_2(t_0) + q_1)\,\beta' = 0$$

$$(\varphi'(t) + r_2)\,\tau + (\varphi_1(t) + p_2)\,\alpha' + (\varphi_2(t) + q_2)\,\beta' = 0$$

$$(\psi'(t) + r_3)\,\tau + (\psi_1(t) + p_3)\,\alpha' + (\psi_2(t) + q_3)\,\beta' = 0$$

Hievon drücken die beiden ersten aus, dass die beiden Nachbarcurven durch denselben Punkt A, die beiden letzten, dass sie noch durch einen andern Punkt gehen sollen. Ferner bedeuten r, p, q, p, q Functionen von τ', α', β'; $r_2\, p_2\, q_2$, $r_3\, p_3\, q_3$ Functionen von τ, α', β', welche mit diesen Grössen, also auch mit κ zugleich unendlich klein werden. Sollen aber diese Gleichungen gleichzeitig bestehen, so muss ihre Determinante gleich 0 sein. Lässt man in derselben $\kappa = 0$ werden, so reducirt sie sich auf die folgende:

$$\begin{vmatrix} \varphi'(t_0) & 0 & \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) \\ \psi'(t_0) & 0 & \psi_1(t_0) & \psi_2(t_0) \\ 0 & \varphi'(t) & \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ 0 & \psi'(t) & \psi_1(t) & \psi_2(t) \end{vmatrix}$$

und diese ist nichts Anderes, als unsere Function $-\Theta(t, t_0)$. Mithin lässt sich die Determinante obigen Systems von Gleichungen auf die Form bringen: $-\Theta(t, t_0) - K(t, t_0, \kappa)$ und da dieselbe verschwinden soll, so muss sein:

$$17.) \quad \Theta(t, t_0) + K(t, t_0, \kappa) = 0$$

Ist nun C ein Punkt der ursprünglichen Curve, welcher zu $t = t'$ gehört und nicht

zu A conjugirt ist, so ist $\Theta(t', t_0)$ von 0 verschieden und man kann daher für k eine Grenze so feststellen, dass auch für alle unterhalb derselben gelegenen Werte von k der Ausdruck $\Theta(t', t_0) + K(t', t_0, k)$ von 0 verschieden ist, d. h. es wird keine der der ursprünglichen unendlich nahe gelegenen Curven die erste im Punkte t' oder in dessen Nähe schneiden können, da man stets noch eine Grösse δ finden kann, derart dass für jeden Wert von t innerhalb des Intervalles $t'-\delta \ldots t'+\delta$ jene Grösse von 0 verschieden ist. Umgekehrt aber wird jene unendlich nahe Curve die ursprüngliche unendlich nahe bei C schneiden sobald es in der Strecke AB einen Punkt giebt, der dem Punkte A conjugiert ist. Denn man kann dann stets für k einen so kleinen Wert finden, dass bei hinreichend kleinem Werte von δ das Vorzeichen von $\Theta(t'-\delta, t_0) + k(t'-\delta, t_0, k)$ dem von $\Theta(t'-\delta, t_0)$ und das Vorzeichen von $\Theta(t'+\delta, t_0) + K(t'+\delta, t_0, k)$ gleich ist. Da aber $\Theta(t, t_0)$ bei seinem Verschwinden sein Zeichen wechselt, und $\Theta(t', t_0) = 0$ sein soll, so haben $\Theta(t'-\delta, t_0)$ und $\Theta(t'+\delta, t_0)$ entgegengesetztes Zeichen. Mithin muss auch

der Ausdruck $\Theta(t, t_0) + \kappa(t, t_0, \kappa)$ innerhalb des Intervalles $t' - \delta \ldots t' + \delta$ einmal verschwinden oder mit andern Worten:

Wenn es in der Strecke AB der ursprünglichen Curve einen dem Anfangspunkte conjugirten Punkt t' giebt, so werden alle unendlich nahen, der Differentialgleichung $G = 0$ genügenden Curven, welche durch denselben Anfangspunkt gehen, die erste Curve zum zweiten Male in einem Punkte treffen, der dem Punkte t' unendlich nahe liegt. Es ist daher der conjugirte Punkt nichts Anderes als die Grenzlage, welcher sich die Schnittpunkte der unendlich benachbarten Curven von der angegebenen Beschaffenheit mit der ursprünglichen Curve nähern, wenn man den Winkel, welchen die Anfangsrichtungen beider Curven mit einander einschliessen kleiner und kleiner werden lässt. Existirt eine solche Grenzlage innerhalb AB nicht, so besitzt die Curve in der Strecke AB keinen conjugirten Punkt. Wir werden zugleich zeigen, dass der Punkt A selbst diese Grenzlage nicht sein kann, dass es also unter den benachbarten Curven keine geben kann,

welche die ursprüngliche beliebig nahe bei A schneiden.

Analytisch würde sich dieser Fall auf folgende Art ausdrücken: Sollte in einem Punkte t die ursprüngliche Curve von einer benachbarten geschnitten werden, so müsste die Gleichung gelten:

$$\begin{vmatrix} 0, & \varphi'(t_0)+r, & \varphi_1(t_0)+p, & \varphi_2(t_0)+q \\ 0, & \psi'(t_0)+r_1, & \psi_1(t_0)+p_1, & \psi_2(t_0)+q_1 \\ \varphi'(t)+r_2, & 0, & \varphi_1(t)+p_2, & \varphi_2(t)+q_2 \\ \psi'(t)+r_3 & 0, & \psi_1(t)+p_3, & \psi_2(t)+q_3 \end{vmatrix} = 0$$

welche für $k=0$ in $\Theta(t, t_0)=0$ übergeht. Werden für $\tau, \tau', \alpha', \beta'$ ihre Potenzreihen in k eingesetzt, so ist dies eine Gleichung zwischen t und k. Da nun $\varphi'(t), \varphi_1(t), \ldots \psi_2(t)$ Potenzreihen sind, die in der Umgebung des Punktes t_0 reguläre Functionen von t sind, so können wir die Determinante in eine Potenzreihe von $t-t_0$ und k entwickeln, welche jedenfalls für hinreichend kleine Werte von $t-t_0$ und k convergirt. Sollten in jeder Nähe der ursprünglichen Curve solche Curven existiren, welche dieselbe beliebig nahe bei A schneiden, so müsste man, nachdem für $t-t_0$ und k beliebig kleine Grenzen vorgeschrieben sind, innerhalb derselben Werte von $t-t_0$ und k finden

können, für welche jene Gleichung erfüllt ist. Setzt man nun $t = t_0$, so werden r, p, q resp. gleich r_2, p_2, q_2 und r_1, p_1, q_1 resp. gleich r_3, p_3, q_3. Es wird daher obige Determinante die Form haben:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a & 0 & b & c \\ a_1 & 0 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a & -a & 0 & 0 \\ a_1 & -a_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & -a \\ a_1 & -a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$$

Es verschwindet daher die Potenzreihe von $t - t_0$ und k für $t = t_0$, welchen Wert auch k haben mag, d. h. sie ist durch $t - t_0$ teilbar. Da nun der von k unabhängige Teil gleich $-\Theta(t, t_0)$ ist, so kommt, wenn wir durch $t - t_0$ dividiren

$$-\left(\frac{d\,\Theta(t, t_0)}{dt}\right)_{t=t_0} + (t - t_0, k) = 0$$

Aus dieser Form ersieht man aber, dass diese Gleichung nicht erfüllbar ist, sobald $t - t_0$ und k innerhalb gewisser Grenzen liegen, da $\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)_{t=t_0}$ nach pag. den endlichen und von 0 verschiedenen Wert $\frac{C}{F_1(t_0)}$ besitzt. Es kann daher eine der ursprünglichen benachbarte Curve die erstere zum zweiten Male unendlich nahe bei A schneiden. – Da man in der Wahl der unabhängigen Veränder-

lichen t eine grosse Willkür hat und da die Constanten α und β auf mannigfache Weise gewählt werden können, so wird man auch für die Function Θ verschiedene Formen aufstellen können, und man müsste, streng genommen, noch nachweisen, dass die Auflösung der Gleichung $\Theta(t, t_0) = 0$ stets zu demselben conjugirten Punkte führt. Die geometrische Bedeutung der conjugirten Punkte macht jedoch diesen Beweis überflüssig.

Capitel 12.

Letzte notwendige Bedingung für das Eintreten eines Maximums oder Minimums und Beweis, dass die nunmehr gegebenen Bedingungen auch hinreichend sind.

Wir haben im vorigen Capitel bewiesen, dass die Curve, welche einer der Differentialgleichung $G=0$ benachbarten Curve benachbart sind, und selbst dieser Differentialgleichung genügen, ferner denselben Anfangspunkt besitzen wie die ursprüngliche und in ihrer Anfangsrichtung nur wenig von dieser abweichen, die ursprüngliche Curve zum zweiten Male erst in der Nähe des conjugirten Punktes schneiden, und dass dieser conjugirte Punkt nicht unendlich nahe bei A liegen kann. Hieraus folgt, dass die Gesammtheit der Punkt, welche man von dem Punkte A aus durch der Gleichung $G=0$ genügende Curven errei-

chen kann und die vor dem conjugirten Punkte liegen, ein zusammenhängendes Flächenstück bilden d. h. man kann, wenn P_1 ein Punkt jener Gesammtheit ist, A um P_1 ein so kleines Flächenstück abgrenzen, dass alle innerhalb desselben liegenden Punkte ebenfalls zu dieser Gesammtheit gehören.

Denn es seien

$$x = \varphi(t, \alpha, \beta) \quad , \quad y = \psi(t, \alpha, \beta)$$

die Gleichungen der gegebenen Curve und die Coordinaten eines Punktes P_1 derselben $x_1 = \varphi(t_1, \alpha, \beta)$, $y_1 = \psi(t_1, \alpha, \beta)$. Ferner seien $x_1 + \xi$, $y_1 + \eta$ die Coordinaten eines andern in der Nähe des Punktes P_1 gelegenen Punktes P_2, so dass ξ η beliebig kleine Grössen sind. Es wird sich dann zwischen A und P_2 eine der Differentialgleichung genügende Curve ziehen lassen, wenn man vier Grössen, τ τ' α' β' als Potenzreihen von ξ η so bestimmen kann, dass die Gleichungen bestehen:

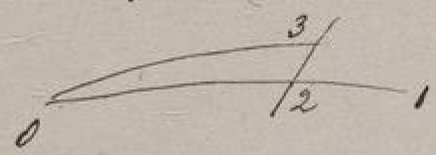
$$0 = \varphi'(t_0)\tau' + \varphi_1(t_0)\alpha' + \varphi_2(t_0)\beta' + (\tau'\alpha'\beta')_2$$
$$0 = \psi'(t_0)\tau' + \psi_1(t_0)\alpha' + \psi_2(t_0)\beta' + (\tau'\alpha'\beta')_2$$
$$\xi = \varphi'(t_1)\tau + \varphi_1(t_1)\alpha' + \varphi_2(t_1)\beta' + (\tau\alpha'\beta')_2$$
$$\eta = \psi'(t_1)\tau + \psi_1(t_1)\alpha' + \psi_2(t_1)\beta' + (\tau\alpha'\beta')_2$$

Dazu ist erforderlich, dass die Determinante der auf die linearen Glieder reducirten vier Gleichungen nicht verschwindet. Da diese aber nichts andres ist als $-\Theta(t_1 t_0)$ und diese Function, vorausgesetzt dass P_1 nicht gerade der zu A conjugirte Punkt ist, nicht gleich Null ist, so lassen sich in der That $\tau\tau'\alpha'\beta'$ als Potenzreihen von $\xi\,\eta$ entwickeln, welche für hinreichend kleine Werte dieser Grössen convergiren. Es giebt daher auch zwischen A und P_2 eine der Differentialgleichung genügende Curve und diese wird der ersteren benachbart sein und in ihrer Anfangsrichtung von der der ersteren beliebig wenig abweichen, wenn ξ und η und somit $\tau\tau'\alpha'\beta'$ hinreichend kleine Grössen sind. Stellt man die Determinante für die Curve AP_2 auf, welche gleich 0 gesetzt die Gleichung zur Bestimmung des zu A conjugirten Punktes dieser Curve liefert, so ist dieselbe ebenfalls in eine Potenzreihe von $\xi\,\eta$ entwickelbar, welche für $\xi = \eta = 0$ in $-\Theta(t_1, t_0)$ übergeht. Da diese Function $\Theta(t_1, t_0)$ von Null

verschieden ist, so wird auch jene Determinante für hinreichend kleine Werte von $\xi\,\eta$ nicht verschwinden und es wird innerhalb der Strecke AP_2 kein zu A conjugirter Punkt vorhanden sein.
Man kann somit die zwischen zwei conjugirten Punkten gelegene Strecke der ursprünglichen Curve stets durch einen schmalen Flächenstreifen einhüllen von der Beschaffenheit, dass sich von jedem Punkte desselben nach dem Punkte A hin eine und nur eine Curve ziehen lässt, welche der Differentialgleichung $G=0$ genügt, der ersteren benachbart ist und in ihrer Anfangsrichtung nur wenig von der ersteren verschieden ist.

Nun sei ein der Differentialgleichung $G=0$ genügendes Curvenstück 01 gegeben von der Art, dass für keinen Punkt desselben F_1 gleich 0 oder ∞ wird und dass der zu 0 conjugirte Punkt nicht auf demselben liegt. Zwischen den Punkten 0 und 1 nehmen wir einen beliebigen Punkt 2 an und ziehen durch ihn eine willkürliche, in der Umgebung

des Punktes 2 aber reguläre Curve, welche



, die Curve 01 in 2 schneidet. Auf dieser nehmen wir einen Punkt 3 so nahe bei 2 an, dass sich von 0 aus nach dem Punkte 3 eine der Differentialgleichung genügende Curve ziehen lässt, welche ganz innerhalb des vorerwähnten Flächenstreifens liegt, und betrachten die Änderung, welche das Integral erfährt, wenn wir dasselbe über 03 + 32 statt über 02 erstrecken. Dabei bezeichnen wir ein über eine der Differentialgleichung genügende Curve erstrecktes Integral mit J, ein über eine willkürliche Curve erstrecktes mit $\bar{J}$ und deuten durch die beigefügten Indices die Grenzen und die Richtung der Integration an.

Es handelt sich also um die Berechnung des Ausdrucks:

$$1) \quad J_{03} + \bar{J}_{32} - J_{02}$$

Nach Formel 11) Cap. 5. ist nun, wenn man $\frac{\partial F}{\partial x'}$ mit $F^{(1)}$, $\frac{\partial F}{\partial y'}$ mit $F^{(2)}$ bezeichnet und beachtet, dass in jener Formel das Integral verschwindet:

$$2.) \quad J_{03} - J_{02} = F^{(1)}(x_2 y_2, x_2' y_2')\,\xi + F^{(2)}(x_2 y_2, x_2' y_2')\,\eta + \left(\xi, \eta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}\right)_2$$

worin $x_2 y_2, x_2' y_2'$ die Werte der Grössen $x\, y\, x'\, y'$

im Punkte 2, $\xi\ \eta$ die Verrückungen des Endpunktes bedeuten und $\xi\ \eta\ \frac{d\xi}{dt}\ \frac{d\eta}{dt}$ Grössen sind, welche mit der Entfernung des Punktes 3 vom Punkte 2 zugleich unendlich klein werden. Ist σ die Bogenlänge von 32 und denken wir uns die Coordinaten der Punkte von 32 als Funktionen des von 3 ausgerechneten Bogens σ, so ist:

$$\bar{J}_{32} = \int_0^\sigma F(x\, y\, x'\, y')\, d\sigma'$$

Entwickeln wir F nach Potenzen von σ' und integriren alsdann, so kommt:

$$3^a)\quad \bar{J}_{32} = F(x_3\, y_3\, x_3'\, y_3')\,\sigma + (\sigma)_2 ,$$

wo $x_3'\ y_3'$ die Richtungscosinus von 32 im Punkte 3 sind. Statt $x_3\ y_3,\ x_3'\ y_3'$ können wir aber auch die Coordinaten von 2 und die Richtungscosinus von 32 im Punkte 2 setzen, da diese sich von jenen nur um Grössen unterscheiden, die mit σ zugleich unendlich klein werden, so dass sich also nur die Glieder zweiter und höherer Dimension ändern würden. Werden die Richtungscosinus von 32 in 2 mit $\bar{p}_2\ \bar{q}_2$, die von 02 in 2) mit $p_2\ q_2$ bezeichnet, so ist:

$$\bar{J}_{32} = F(x_2\, y_2\,,\bar{p}_2\ \bar{q}_2)\,\sigma + (\sigma)_2$$

oder da $\mathfrak{F}$ eine homogene Function ersten Grades von $\bar{p}_2\ \bar{q}_2$ ist:

$$3)\quad \bar{J}_{32} = \left\{ \mathfrak{F}^{(1)}(x_2 y_2, \bar{p}_2 \bar{q}_2)\bar{p}_2 + \mathfrak{F}^{(2)}(x_2 y_2, \bar{p}_2 \bar{q}_2)\bar{q}_2 \right\}\sigma + (\sigma)_2$$

Ferner ist:

$$4.)\quad \xi = -\bar{p}_2\sigma + (\sigma)_2 \quad , \quad \eta = -\bar{q}_2\sigma + (\sigma)_2$$

Mithin wird aus 1) mit Rücksicht auf die Gleichungen 2, 3) 4):

$$J_{03} + \bar{J}_{32} - J_{02} = \left\{ \left[\mathfrak{F}^{(1)}(x_2 y_2, \bar{p}_2 \bar{q}_2) - \mathfrak{F}^{(1)}(x_2 y_2, p_2 q_2)\right]\bar{p}_2 + \left[\mathfrak{F}^{(2)}(x_2 y_2, \bar{p}_2 \bar{q}_2) - \mathfrak{F}^{(2)}(x_2 y_2 p_2 q_2)\right]\bar{q}_2 \right\} + (\sigma)_2$$

Für den Coefficienten von σ führen wir die Bezeichnung $\mathcal{E}(x_2 y_2 p_2 q_2 \bar{p}_2 \bar{q}_2)$ ein, setzen also:

$$5)\ \mathcal{E}(x_2 y_2, p_2 q_2, \bar{p}_2 \bar{q}_2) = \left[\mathfrak{F}^{(1)}(x_2 y_2, \bar{p}_2 \bar{q}_2) - \mathfrak{F}^{(1)}(x_2 y_2, p_2 q_2)\right]\bar{p}_2 + \left[\mathfrak{F}^{(2)}(x_2 y_2, \bar{p}_2 \bar{q}_2) - \mathfrak{F}^{(2)}(x_2 y_2, p_2 q_2)\right]\bar{q}_2$$

Daher wird:

$$6.)\quad J_{03} + \bar{J}_{32} - J_{02} = \mathcal{E}(x_2 y_2, p_2 q_2, \bar{p}_2 \bar{q}_2)\sigma + (\sigma)_2$$

Nimmt man demnach σ hinreichend klein an, d. h. wählt man den Punkt 3 nahe genug an 2, so kann man bewirken, dass die Aenderung des Integrals dasselbe Vorzeichen erhält wie die Function $\mathcal{E}$.

Der Punkt 2 ist innerhalb der Strecke 01 beliebig gewählt, ebenso stellt 23 eine beliebige Richtung dar. Wäre nun für irgend einen Punkt 2 und für irgend welche Richtungen die

Function $\mathcal{E}$ negativ, für andere dagegen positiv, so könnte man die gegebene Curve so variiren, dass die Aenderung des Integrals ein mal negativ, ein ander Mal positiv ausfiele.

Daher der Satz:

Soll das über die der Differentialgleichung $G=0$ genügende Curve 01 erstreckte Integral ein Maximum oder Minimum sein, so muss notwendig die Function $\mathcal{E}$ für jeden Punkt der Curve und in jedem Punkte für jede beliebige Richtung einerlei Vorzeichen besitzen und zwar für das Maximum negativ, für das Minimum positiv sein.

Die Function $\mathcal{E}$ steht in naher Beziehung zu der Function F. Nach einem Satze der Differentialrechnung ist:

$$f(p_1 q_1)-f(p_0 q_0)=\int_0 \left\{f^{(1)}(p_0+\varepsilon(p_1-p_0), q_0+\varepsilon(q_1-q_0))(p_1-p_0)+f^{(2)}(p_0+\varepsilon(p_1-p_0), q_0+\varepsilon(q_1-q_0))\,q_1-q_0\right\}d\varepsilon$$

Setzen wir daher:

$$7)\quad p_\varepsilon=p+\varepsilon(\bar{p}-p)=(1-\varepsilon)p+\varepsilon\bar{p}$$

$$q_\varepsilon=q+\varepsilon(\bar{q}-q)=(1-\varepsilon)q+\varepsilon\bar{q},$$

so erhält man:

$$F^{(1)}(x\,y,\bar{p}\,\bar{q})-F^{(1)}(x\,y,p\,q)=\int_0^1\left\{F^{(11)}(x,y,p_\varepsilon q_\varepsilon)(\bar{p}-p)+F^{(22)}(x\,y,p_\varepsilon q_\varepsilon)\bar{q}-q)\right\}d\varepsilon$$

$$F^{2}(x\,y,\bar{p}\,\bar{q})-F^{(2)}(x\,y,p\,q)=\int_0^1\left\{F^{(21)}(x,y,p_\varepsilon q_\varepsilon)(\bar{p}-p)+F^{(22)}(x\,y,p_\varepsilon q_\varepsilon)(\bar{q}-q)\right\}d\varepsilon$$

Beachtet man jetzt, dass $F^{(12)}=F^{(21)}$ und ferner

nach Formel 8) Cap. 5.:

$$F^{(11)} = q_\varepsilon^2 F_1 \;,\; F^{(12)} = -q_\varepsilon p_\varepsilon F_1 \;,\; F^{(22)} = p_\varepsilon^2 F_1$$

ist, so wird:

$$\mathcal{E}(xy, pq, \bar p \bar q) = \int F_1(xy, p_\varepsilon q_\varepsilon)\{(q_\varepsilon(\bar p - p) - p_\varepsilon(\bar q - q))q_\varepsilon \bar p + (-q_\varepsilon(\bar p - p) + p_\varepsilon(\bar q - q))p_\varepsilon \bar q\}\, d\varepsilon$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck wird zu:

$$(q_\varepsilon \bar p - p_\varepsilon \bar q)(q_\varepsilon(\bar p - p) - p_\varepsilon(\bar q - q)) = (1-\varepsilon)(q\bar p - p\bar q)^2$$

mithin:

8.) $\mathcal{E}(xy, pq, \bar p \bar q) = (q\bar p - p\bar q)^2 \int_0^1 F_1(xy, p_\varepsilon q_\varepsilon)(1-\varepsilon)\, d\varepsilon$

Das Integral ist gleich der Hälfte eines der Werte, welche $F_1(xy, p_\varepsilon q_\varepsilon)$ annimmt, wenn ε zwischen 0 und 1 variirt. Verstehen wir daher unter $p_\varepsilon, q_\varepsilon$ die Richtungscosinus gerade derjenigen Richtung, welcher dieser Wert zukommt, so können wir schreiben:

9.) $\mathcal{E}(xy, pq, \bar p \bar q) = \frac{1}{2}(q\bar p - p\bar q)^2 F_1(xy, p_\varepsilon, q_\varepsilon)$

Aus dieser Gleichung folgt die früher als notwendig nachgewiesene Bedingung, dass $F_1(xy, pq)$ für keinen Punkt und für keine Tangentenrichtung der Curve sein Vorzeichen wechseln darf. Denn wir können $\bar p \bar q$ so nahe an $p q$ wählen, dass $F_1(xy, p_\varepsilon, q_\varepsilon)$ beliebig wenig von $F_1(xy, pq)$ verschieden ist. Es würde daher auch

die Function $\mathcal{E}$ ihr Vorzeichen wechseln, wenn dies bei F_1 der Fall wäre und es könnte nach obigem Satze kein Maximum oder Minimum eintreten. Hier haben wir also die frühere Bedingung ganz und gar ohne die Betrachtung der zweiten Variation gewonnen. Zugleich erkennt man, dass man auch $F_1(x, y, p_\varepsilon q_\varepsilon)$ für irgend eine Richtung $p_\varepsilon q_\varepsilon$ verschwindet, darum noch nicht obiges Integral und somit auch nicht die Function $\mathcal{E}$ zu verschwinden braucht.

Nehmen wir nun an, der Ausdruck

$$\int_0 F_1(x\, y,\, p_\varepsilon q_\varepsilon)(1-\varepsilon)\, d\varepsilon$$

werde in keinem Punkte der Curve und für keine Richtung $\bar{p}\, \bar{q}$ gleich Null, so hat er im Falle des Maximums eine obere negative, im Falle eines Minimums eine untere positive von Null verschiedene Grenze. Den entgegengesetzten Fall müssen wir einer speciellen Untersuchung überlassen. Ziehen wir dann von 0 aus der Differentialgleichung genügende Curven, deren Anfangsrichtung hinreichend wenig von der Anfangsrichtung von 01 abweicht, und betrachten sie nur soweit, als sie hinreichend nahe bei 01 bleiben und kein zu 0 conjugirter Punkt auf ihnen liegt, so lässt sich er-

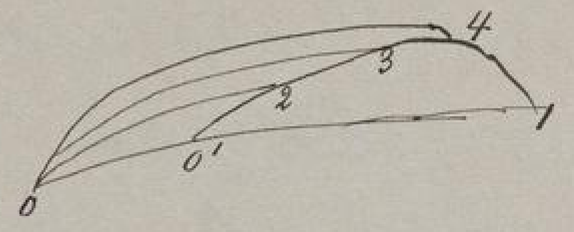
reichen, dass auch für diese Curven $E(x\,y, p\,q, \bar{p}\,\bar{q})$ bei beliebigen $\bar{p}\,\bar{q}$ nirgends ein Zeichen wechselt. Denn nehmen wir einen beliebigen Punkt auf einer derselben an, so giebt es einen Punkt auf $0\,1$, für den die Grössen $x\,y\,p\,q$ nur wenig von den zu jenem Punkt gehörigen Grössen abweichen. Es wird sich daher auch bewirken lassen, dass der Ausdruck:

$$\int_0^1 F_1(x\,y, p_\varepsilon\,q_\varepsilon)(1-\varepsilon)\,d\varepsilon$$

für beide Punkte dasselbe Zeichen hat. Die Punkte, die auf diese Weise in Betracht kommen, bilden einen Bereich, welcher den Punkt 1 einschliesst, die Curve $0\,1$ umhüllt und höchstens bei 0 in eine Spitze ausläuft, also den Punkt 0 nicht einschliesst. Ist $0'$ ein Punkt auf $0\,1$, beliebig nahe bei 0, so wird $0'1$ von dem Bereiche völlig umschlossen. Verbindet man den Punkt $0'$ mit dem Punkte 1 durch eine beliebige Curve, welche nur der Bedingung unterliegt, dass sie überall regulär ist, und ganz innerhalb des Bereiches liegt, so lässt sich beweisen, dass das über diese Curve erstreckte Integral $\bar{J}_{0'1}$, wenn E negativ, kleiner, wenn E positiv, grösser ist, als das über die ursprüngliche Curve $0'1$ erstreckte Integral $J_{0'1}$.

Es sei 3 irgend ein Punkt auf der willkür-

lichen Curve, deren Coordinaten wir uns als Functionen der Bogenlänge s denken wollen. Vom Punkte 0 aus ziehen



wir nach 3 eine der Differentialgleichung genügende Curve und betrachten die Integralsumme $J_{03} + \bar{J}_{31}$ als Function von s. Bezeichnen wir diese Summe mit $S(s)$ und einen Zuwachs von s mit σ, so ist, wenn wir mit 2 einen nahe vor 3 gelegenen Punkt der beliebigen Curve verstehen und diesen ebenfalls mit 0 durch eine der Differentialgleichung genügende Curve verbunden denken:

$$S(s-\sigma) - S(s) = J_{02} + \bar{J}_{02} - J_{03} - \bar{J}_{31} = J_{02} + \bar{J}_{23} - J_{03}$$

und daher nach Formel 6):

$$10.)\quad S(s-\sigma) - S(s) = E(x_3 y_3, p_3 q_3, \bar{p}_3 \bar{q}_3) \cdot \sigma + (\sigma)_2,$$

worin $x_3\, y_3$ die Werte von $x\, y$ im Punkte 3, $p_3\, q_3$ die Richtungscosinus der Tangente an die der Differentialgleichung genügende Curve und $\bar{p}_3\, \bar{q}_3$ die Richtungscosinus von 23 im Punkte 3 sind. Nehmen wir nun ebenso unmittelbar nach dem Punkte 3 auf der beliebigen Curve einen Punkt 4 an und verbinden diesen mit 0 durch eine Curve, welche die Gleichung $G = 0$ befriedigt, so ist:

$$S(s+\sigma) - S(s) = J_{04} + \bar{J}_{41} - J_{03} - \bar{J}_{31} = J_{04} - \bar{J}_{34} - J_{03}$$

Nach Formel 2) ist nun, da hier $\xi = \bar{p}_3 \sigma + (\sigma)_2$, $\eta = \bar{q}_3 \sigma + (\sigma)_2$ ist

$$J_{0'4} - J_{0'3} = \left\{ F^{(1)}(x_3 y_3, p_3 q_3)\bar{p}_3 + F^{(2)}(x_3 y_3, p_3 q_3)\bar{q}_3 \right\}\sigma + (\sigma)_2$$

und ferner ergiebt sich analog wie pag . der Wert von J_{32} abgeleitet ist:

$$J_{34} = F(x_3 y_3, \bar{p}_3 \bar{q}_3)\sigma + (\sigma)_2$$

$$= \left\{ F^{(1)}(x_3 y_3 \bar{p}_3 \bar{q}_3)\bar{p}_3 + F^{(2)}(x_3 y_3, \bar{p}_3 \bar{q}_3) \right\}\sigma + (\sigma)_2$$

Mithin ist:

$$11.)\ S'(s+\sigma) - S'(s) = -\mathcal{E}(x_3 y_3, p_3 q_3, \bar{p}_3 \bar{q}_3)\sigma + (\sigma)_2$$

Wir erhalten somit

$$12.)\ \lim_{\sigma=0} \frac{S(s-\sigma) - S(s)}{-\sigma} = \lim_{\sigma=0} \frac{S(s+\sigma) - S(s)}{\sigma} = -\mathcal{E}(x_3 y_3, p_3 q_3, \bar{p}_3 \bar{q}_3)$$

d. h. es ist $-\mathcal{E}(x_3 y_3, p_3 q_3, \bar{p}_3 \bar{q}_3)$ der Differentialquotient der Function $S(s)$ im Punkte 3. Wenn daher längs der Curve 0'31 die Function $\mathcal{E}$ nirgends positiv ist, so wird $S(s)$ stets wachsen, wenn $\mathcal{E}$ nirgends negativ ist, so wird $S(s)$ stets abnehmen, während der Punkt 3 vom Punkte 0' nach dem Punkte 1 hinrückt. Lassen wir den Punkt 0', der unendlich nahe bei 0 angenommen war, geradezu mit 0 zusammenfallen, so können wir also sagen: Wenn die Function $\mathcal{E}$ nirgends positiv und längs der beliebigen Curve 031 nicht in jedem Punkte Null ist, so ist das über die

ursprüngliche Curve 01 erstreckte Integral jederzeit grösser als das über 031 erstreckte; und wenn E längs der Curve 031 nicht negativ und nicht in jedem Punkte Null ist, so ist das über die der Differentialgleichung genügende Curve 01 erstreckte Integral beständig kleiner als das über eine willkürliche Curve 031 erstreckte.

Es bleibt daher noch übrig, den Fall zu discutiren, wo die Function E dwa längs der ganzen Curve 031 verschwände. Nach der Voraussetzung, die wir über das in E auftretende Integral (cfr. 8 d. Cap.) gemacht haben, ist dies nur dann möglich, wenn längs der ganzen Curve

$$13.)\quad q\bar{p} - p\bar{q} = 0$$

wäre, d.h. wenn jede Curve 03, welche der Gleichung $G=0$ genügt, im Punkte 3 mit der Curve 031 eine gemeinsame Tangente hätte.

Wir wollen zeigen, dass die Curve, welche von den zum Punkte 0 conjugirten Punkten gebildet wird, diese Eigenschaft besitzt und dass sich von 0 aus innerhalb des von diesen Curve begrenzten Gebietes keine Curve von derselben Beschaffenheit ziehen lässt.

Wie wir pag. 296 sahen, können wir sämmtliche

der Differentialgleichung $G = 0$ genügende Curven, die durch einen Punkt gehen und deren Anfangsrichtungen hinreichend wenig von einander verschieden sind, in der Form darstellen:

$$x = \varphi(t, \kappa), \quad y = \psi(t, \kappa),$$

wo κ unterhalb einer gewissen Grenze liegt und jeder Curve ein andrer Wert von κ enspricht. Fixiren wir also einen Wert von κ und nehmen wir einen zweiten Wert $\kappa + \kappa'$ an, so wird die diesem Werte entsprechende Curve durch die Gleichungen dargestellt werden können:

$$x + \xi = \varphi(t + \tau', \kappa + \kappa'), \quad y + \eta = \psi(t + \tau', \kappa + \kappa')$$

wo dem Anfangspunkt derselbe Wert von t entspricht, wie bei der ersten Curve. Soll diese Curve die erste schneiden, so muss sein:

$$0 = \varphi'(t)\tau' + \frac{\partial \varphi}{\partial \kappa}\kappa' + (\tau', \kappa')_2$$

$$0 = \psi'(t)\tau' + \frac{\partial \psi}{\partial \kappa}\kappa + (\tau', \kappa')_2$$

Die Determinante der linearen Glieder liefert gleich 0 gesetzt die Gleichung zur Bestimmung des zum Anfangspunkte conjugirten Punktes:

$$14) \quad \varphi'(t)\frac{\partial \psi}{\partial \kappa} - \psi'(t)\frac{\partial \varphi}{\partial \kappa} = 0$$

Die kleinste Wurzel dieser Gleichung, welche grösser ist, als der zum Anfangspunkt gehörige

Wert von t, der zum conjugirten Punkt gehört, ist derselbe t, so sind die Coordinaten des Punktes:

$$\bar{x} = \varphi(t_1, k), \quad \bar{y} = \psi(t, k)$$

Betrachten wir hierin t als Function von k, definirt durch die vorhergehende Gleichung, und geben wir k eine Reihe von Werten, so stellen diese beiden Gleichungen die Curve der zu 0 conjugirten Punkte dar. Die Richtungscosinus der Tangente derselben sind proportional den Größen $\frac{\partial \bar{x}}{\partial k}$ und $\frac{\partial \bar{y}}{\partial k}$. Nun ist:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial k} = \frac{\partial \varphi(t_1, k)}{\partial t_1} \frac{\partial t}{\partial k} + \frac{\partial \varphi(t_1, k)}{\partial k}$$

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial k} = \frac{\partial \psi(t_1, k)}{\partial t} \frac{\partial t_1}{\partial k} + \frac{\partial \psi(t_1, k)}{\partial k}$$

Multiplicirt man nun die erste dieser Gleichungen mit $\frac{\partial \psi(t_1, k)}{\partial t} = \psi'(t_1)$ die zweite mit $\frac{\partial \varphi(t_1, k)}{\partial t} = \varphi'(t_1)$ und subtrahirt die erste von der zweiten, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichung 14)

$$\varphi'(t_1) \frac{d\bar{y}}{dk} - \psi'(t_1) \frac{d\bar{x}}{dk} = 0$$

Da nun $\varphi'(t_1)$ und $\psi'(t_1)$ proportional sind den Richtungscosinus der Tangente an eine zwischen t_0 und t_1 gezogene der Differentialgleichung genügende Curve im Punkte t_1, so sagt diese Gleichung aus, dass die Tangenten beider Curven im Punkte t_1 zusammenfallen, d. h. es ist, wie behauptet

wurde, die Curve der conjugirten Punkte die Enveloppe der durch den Punkt o gehenden und der Differentialgleichung genügenden Curven.

Soll nun umgekehrt $\bar{x} = f(u)$, $\bar{y} = g(u)$ welche innerhalb des von der Enveloppe begrenzten Gebietes liegt und mit keiner der von o ausgehenden $G = o$ genügenden Curven gänzlich zusammenfällt, von der von o ausgehenden der Differentialgleichung $G = o$ genügenden Curven berührt werden, so müssen für den Berührungspunkt die Gleichungen bestehen:

$$\varphi(t, k) = f(u)$$

$$\psi(t, k) = g(u)$$

$$15) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

Durch die beiden ersten Gleichungen bestimmen sich die dem Berührungspunkte zugehörigen Werte von t und u als Functionen von k.

Da dieselben gelten sollen für jeden hinreichend kleinen Wert von k, so kann man dieselben nach k differentiren und erhält:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{dt}{dk} + \frac{\partial \varphi}{\partial k} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dk}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{dt}{dk} + \frac{\partial \psi}{\partial k} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{du}{\partial k}$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $\frac{dg}{du}$, die zweite mit $-\frac{df}{du}$ und addirt dann beide, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichung 15)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial k}\frac{dg}{du} - \frac{\partial \psi}{\partial k}\frac{df}{du} = 0$$

und wenn man hieraus und aus 15) die Grössen $\frac{dg}{du}$ und $\frac{df}{du}$ eliminirt, so kommt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial k} - \frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial k} = 0$$

Dies ist aber gerade die Gleichung, welche zur Bestimmung des zum Anfangspunkte conjugirten Punktes diente. Es müsste somit der Berührungspunkt der von o ausgehenden der Differentialgleichung genügenden Curve mit der beliebigen Curve der zu o conjugirte Punkt sein. Dies wäre aber nur möglich, wenn die Curve $\bar{x} = f(u)$, $\bar{y} = g(u)$ mit der Enveloppe zusammenfiele, während doch nach unserer Voraussetzung diese Curve ganz im Innern des von jener Enveloppe begrenzten Gebietes liegen sollte. Somit giebt es innerhalb dieses Gebietes keine von o ausgehende Curve von der Beschaffenheit, dass jede der Differentialgleichung genügende Curve, welche den Punkt o mit einem Punkte der willkürlichen Curve verbindet, die letztere gleichzeitig be-

rührt.

Es könnte jedoch $\varphi \bar{p} - p \bar{\varphi}$ auch dann noch überall gleich 0 sein, wenn die willkürliche Curve zwischen den Punkten 0 und 1 in ihrer ganzen Ausdehnung mit einer von 0 ausgehenden der Differentialgleichung genügenden Curve zusammenfiele. Da es aber innerhalb des oben definirten Flächenstreifens zwischen den Punkten 0 und 1 nur eine einzige Curve $G = 0$ giebt, so könnte die willkürliche Curve 031 nur mit der ursprünglichen Curve 01 zusammenfallen und dann wäre sie keine Variation der letzteren.

Es kann somit die Function E nicht für die ganze variirte Curve verschwinden.

Es ist nun nicht notwendig, dass die Curve 031 in ihrem ganzen Verlaufe eine einzige reguläre Curve sei. Nehmen wir an, 031 sei aus beliebig vielen regulären Stücken zusammengesetzt, so wird das Integral erklärt als die Summe der Integrale über die einzelnen Teile und es gelten dieselben Schlussfolgerungen. Dabei kann es vorkommen, dass einer dieser Teile ganz und gar mit einem Stücke einer von 0 ausgehenden der Differentialgleichung

genügenden Curve zusammenfällt. Ist dieses etwa mit 23 der Fall, so dass längs desselben die Function E gleich 0 ist, so ersetze man dieses Stück 23 durch ein unendlich nahe gelegenes beliebiges Curvenstück 2'3. Dann wird in Bezug auf die Curve 02'31 der oben bewiesene Satz gelten, dass $J_{23} \gtrless J_{02'} + \bar{J}_{2'3}$ je nachdem die Function E längs der Curve 02'31 nirgends positiv oder nirgends negativ ist. Bringt man nun die Curve 2'3 der Curve 23 so nahe als man will, so wird der absolute Betrag der Differenz $J_{03} - J_{02'} - \bar{J}_{2'3}$ kleiner gemacht werden können als eine beliebig klein anzunehmende Grösse δ und es wird nach dem Vorhergehenden im ersten Falle die Differenz $J_{03} - J_{02'} - \bar{J}_{2'3}$ sicher nicht negativ, im zweiten sicher nicht positiv werden. Lässt man nun den Punkt 3 auf der beliebigen Curve etwas weiter nach 1 hinrücken (bis zum Punkte 4), so wird wieder $J_{04} - J_{03} - \bar{J}_{34}$ grösser, resp. kleiner als 0 sein und es ergiebt sich wie früher, dass das über die der Differentialgleichung genügenden Curve 01 erstreckte Integral J_{01} grösser oder kleiner ist als das über die beliebige Curve 02'31 erstreckte, je nachdem die Func-

tion E nirgends negativ oder nirgends positiv ist.

Die einzelnen Stücke der variirten Curve brauchen aber nicht einmal regulär zu sein, damit unsere Schlüsse Giltigkeit behalten, wenn nur die Coordinaten als Functionen einer Grösse dargestellt sind, die erste Ableitungen besitzen.

Denkt man sich nun endlich die Variationen ganz beliebig, so dass nur der Ort der Punkte gegeben werden kann, während es ganz dahingestellt bleibt, ob die Coordinaten Ableitungen besitzen oder nicht, so hat zwar zunächst das Integral über diese Curve hinerstreckt keinen Sinn mehr, indessen kann man die Bedeutung des Integrals so erweitern, dass dasselbe möglicherweise auch in diesem Falle einen Sinn hat.

Nehmen wir zunächst an, die Coordinaten der variirten Curve seien durch Functionen mit Ableitungen darstellbar, so ist das Integral über dieselbe:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(f(t), g(t), f'(t), g'(t))\,dt.$$

Dieses Integral zerlegen wir entsprechend

den Intervallen $t_0 .. \tau_1, \tau_1 ... \tau_2, ... \tau_n ... t_1$ in eine Summe von Integralen

$$\int_{t_0}^{\tau_1} F\,dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} F\,dt + \dots + \int_{\tau_n}^{t_1} F\,dt$$

und nehmen an, dass den Werten $t_0\, \tau_1 \dots \tau_n\, t_1$ resp. die Punkte $x_0\, y_0,\ x_1\, y_1, \dots x_n\, y_n,\ x_{n+1}\, y_{n+1}$ entsprechen mögen. Dann ist:

$$x_1 - x_0 = f'(t_0)(\tau_1 - t_0) + (\tau_1 - t_0)[\tau_1 - t_0]$$

$$y_1 - y_0 = g'(t_0)(\tau_1 - t_0) + (\tau_1 - t_0)[\tau_1 - t_0]$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$y_{n+1} - y_n = g'(\tau_n)(t_1 - \tau_n) + (t_1 - \tau_n)[t_1 - \tau_n],$$

worin $[\tau_\nu - \tau_{\nu-1}]$ eine Grösse bedeutet, welche mit $\tau_\nu - \tau_{\nu-1}$ zugleich unendlich klein wird. Für das erste Integral setzen wir nun:

$$x = x_0 + x_0'(t - t_0) + (t - t_0)[t - t_0]$$

$$x' = x_0' + x_0''(t - t_0) + (t - t_0)[t - t_0]$$

$$y = y_0 + y_0'(t - t_0) + (t - t_0)[t - t_0]$$

$$y' = y_0' + y_0''(t - t_0) + (t - t_0)[t - t_0],$$

für das zweite analog:

$$x = x_1 + x_1'(t - \tau_1) + (t - \tau_1)[t - \tau_1]$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$y' = y_1' + y_1''(t - \tau_1) + (t - \tau)[t - \tau_1]$$

und entsprechend für die andern Integrale.

Diese Ausdrücke setze man in die betreffenden F ein und entwickle sie dann in Potenzreihen. Die Integration ergiebt alsdann:

$$(\tau_1 - t_0)\, F(x_0\, y_0,\, x_0'\, y_0') + (\tau_2 - \tau_1)\, F(x_1, y_1, x_1', y_1') + \dots + (t_1 - \tau_n)\, F(x_n\, y_n\, x_n'\, y_n')$$

plus einer Summe von ebenso viel Gliedern, welche in Bezug auf die Grössen $\tau_\nu - \tau_{\nu-1}$ von zweiter Ordnung unendlich klein werden. Das Integral kann daher geschrieben werden:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{n+1} (\tau_\nu - \tau_{\nu-1})\, F(x_{\nu-1}, y_{\nu-1}, x'_{\nu-1}, y'_{\nu-1}),$$

wobei man unter τ_0 den Wert t_0, unter τ_{n+1} den Wert t_1 zu verstehen hat. Da die $\tau_\nu - \tau_{\nu-1}$ positive Grössen und F in Bezug auf $x'\, y'$ eine homogene Function ersten Grades ist, so geht vorstehender Ausdruck in die Form über:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{n+1} F(x_{\nu-1}, y_{\nu-1}, (\tau_\nu - \tau_{\nu-1})\, x'_{\nu-1}, (\tau_\nu - \tau_{\nu-1})\, y'_{\nu-1})$$

oder da

$$x_\nu - x_{\nu-1} = (\tau_\nu - \tau_{\nu-1})\, x'_{\nu-1} + (\tau_\nu - \tau_{\nu-1})\,[\tau_\nu - \tau_{\nu-1}]$$

$$y_\nu - y_{\nu-1} = (\tau_\nu - \tau_{\nu-1})\, y'_{\nu-1} + (\tau_\nu - \tau_{\nu-1})\,[\tau_\nu - \tau_{\nu-1}]$$

ist, in folgende:

$$\lim_{n=\infty} \left\{ F(x_0\, y_0, x_1 - x_0, y_1 - y_0) + \dots + F(x_n\, y_n, x_{n+1} - x_n, y_{n+1} - y_n) \right\}.$$

Diese Bedeutung des Integrales ist allgemeiner als die erste, mit welcher sie jedoch überall da, wo jene einen Sinn hat, übereinstimmt.

Ist also eine ganz beliebige Variation gegeben, so nehme man auf derselben eine Reihe von Punkten $x_0\, y_0,\ x_1\, y_1, \ldots x_{n+1}\, y_{n+1}$ an derart, dass der Abstand zweier auf einander folgender eine gewisse kleine Grösse δ nicht überschreitet und bilde die Summe:

$$F(x_0\, y_0, x_1 - x_0, y_1 - y_0) + F(x_1\, y_1, x_2 - x_1, y_2 - y_1) + \ldots + F(x_n\, y_n, x_{n+1} - x_n, y_{n+1} - y_n)$$

Lässt man alsdann δ kleiner und kleiner werden, indem man zugleich die Anzahl der Punkte vermehrt, so kann es sein, dass sich die Summe einem bestimmten Werte nähert. Alsdann sagen wir, dieser Grenzwert ist der Wert des über die Curve erstreckten Integrals. Es kann aber auch sein, dass diese Summe sich keinem bestimmten Werte nähert, also z. B. zwischen zwei Werten beständig hin und her schwankt; alsdann sagen wir, das Integral hat über diese Curve erstreckt keinen Sinn.

Wenn wir uns die Reihe der auf der Curve angenommenen Punkte in derselben Reihenfolge durch eine gebrochene Linie verbunden denken, so wird sich das über diese gebrochene Linie erstreckte Integral derselben Grenze nähern, wie das über die Curve erstreckte, falls dasselbe überhaupt eine Bedeutung hat.

Ist also eine Curve 01 gegeben, welche alle bis jetzt aufgestellten Bedingungen des Maximums oder Minimums erfüllt, und wird dieselbe in beliebiger Weise variirt, so können wir, falls das über die variirte Curve erstreckte Integral in dem oben definirten Sinn eine Bedeutung hat, eine gebrochene Linie ziehen, deren Integral beliebig wenig von dem Integral der variirten Curve abweicht, und auf welchem den pag. 252 abgeleitete Satz anwendbar ist. Folglich kann das Integral über die variirte Curve im Falle eines Maximums nicht grösser, im Falle eines Minimums nicht kleiner, als das über die erste Curve erstreckte. Da man den Bereich, innerhalb dessen die Variationen sämmtlich liegen sollen, so schmal machen kann, als man will, so kann man annehmen, dass auf der variirten Curve ein Punkt 3 so nahe an 01, jedoch nicht auf 01 selbst, liegt, dass zwei Curven 03, 31 gezogen werden können, die resp. zwischen den Punkten 0 und 3, 3 und 1 ebenfalls alle Bedingungen des Problems erfüllen. Nehmen wir der Abkürzung wegen an, dass es sich um den Fall des

Maximums handelt. Dann können, wie wir eben sahen, die Integrale über 03 und 31 jedenfalls nicht kleiner sein als die Integrale über die entsprechenden Teile der variirten Curve; nach früheren Sätzen ist aber das über 01 erstreckte Integral grösser als die Summe der über 03 und 31 erstreckten, mithin auch grösser, als das Integral über die variirte Curve. Es findet daher wirklich ein Maximum statt. –

Wir beschliessen dieses Capitel mit einigen Bemerkungen über die drei bereits mehrfach behandelten speciellen Probleme.

Als Curve, welche bei ihrer Rotation um die Achse der Halbebene eine Fläche von kleinstem Inhalt beschreibt, fanden wir die Kettenlinie, jedoch nur innerhalb einer Strecke, welche keine zwei einander conjugirte Punkte enthält. Vom Punkte A aus kann man nach jeder Richtung eine der Differentialgleichung $G = 0$ genügende Curve legen; für jede derselben ist F_1 positiv, sobald man sich auf die Halbebene beschränkt, für welche y positiv ist; es wird daher ein wirkliches Minimum eintreten.

Die Betrachtung der Function E führt nun zu denselben Resultat. Es ist nämlich, wenn $p\,q$, resp $\bar p\,\bar q$ die Richtungscosinus der Tangente an die Kettenlinie in irgend einem Punkte resp. der Tangente an eine beliebige durch diesen Punkt gezogene Linie in eben diesem Punkte sind:

$$F^{(1)}(x\,y,\,x'\,y') = \frac{y\,x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\quad F^{(2)}(x\,y,\,x'\,y') = \frac{y\,y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

also:

$$F^{(1)}(x\,y,\,p\,q) = y\,p\;,\quad F^{(2)}(x\,y,\,p,\,q) = y\,q$$

und daher:

$$E(x\,y,\,p\,q,\,\bar p\,\bar q) = y\,\{(\bar p - p)\,\bar p + (\bar q - q)\,\bar q\}$$
$$= y\,\{1 - (p\,\bar p + q\,\bar q)\},$$

da $\bar p^2 + \bar q^2 = 1$ ist. Der Ausdruck $p\,\bar q + q\,\bar q$ bedeutet den Cosinus des Winkels zwischen jenen beiden Tangenten. Mithin ist die Function E für keinen Punkt der in Betracht kommenden Fläche und für keine zwei Richtungen $p\,q$, $\bar p\,\bar q$ negativ. Ist daher für keinen Punkt der Curve $y=0$, so sind unsere früheren Schlüsse hier anwendbar und es tritt ein wirkliches Minimum des Integrals ein.

Die Curve des schnellsten Falles, für welche also das Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{4g(y+a)}}\,dt$$

ein Minimum sein soll, ist die Cycloide, dargestellt durch die Gleichungen

$$x = g + r\,(t - \sin t)$$

$$y = a = r\,(\mp 1 - \cos t)$$

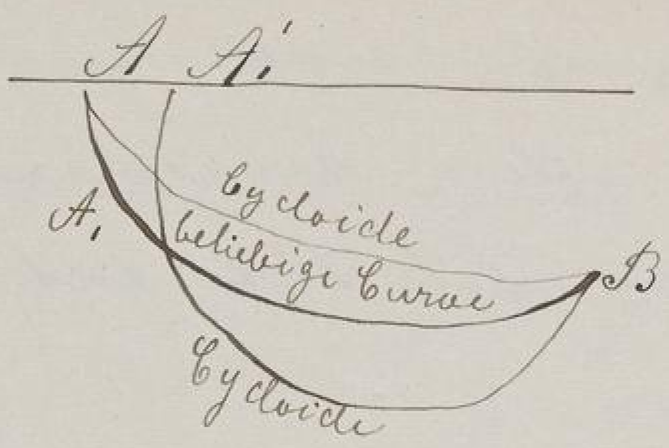
Hiebei ist angenommen, dass der Punkt A, von welchem der bewegliche Punkt mit einer der Grösse $\sqrt{a}$ proportionalen Anfangsgeschwindigkeit ausgeht, der Coordinatenanfangspunkt sei und dass die y-Achse die Richtung der Schwere hat. Die Cycloide wird dann durch einen Kreis erzeugt, welcher auf der Geraden $y = -a$ rollt. Ist a von Null verschieden, so kann man von A aus nach jeder Richtung hin einen Cycloidenbogen construiren. Über einen singulären Punkt hinaus kann jedoch die Curve die verlangte Eigenschaft nicht haben, weil man sie, wenn sie einmal steigt und dann wieder sinkt, leicht durch eine andere ersetzen könnte, für welche das Integral einen kleineren Wert hat. Wenn A und B keine singulären Punkte sind, so hat F, überall auf der Curve und in der Nähe derselben nach allen Richtungen hin einen endlichen von Null verschiedenen positiven Wert. Zwischen zwei beliebigen Punkten kann man,

wenn a gegeben ist, stets einen und nur einen Cycloidenbogen legen, der zwischen A und B keinen singulären Punkt enthält.

Ist also a von 0 verschieden und daher A und B nicht singulär, so ist bewiesen, dass die Curve wirklich das Integral zu einem Minimum macht. Ist dagegen A oder B ein singulärer Punkt der Curve, so wird F. in ihm unendlich gross, ein Fall, den wir nicht allgemein erledigen konnten, sondern der speciellen Untersuchung überliessen.

Ist zunächst A ein singulärer Punkt, d.h. a = 0, so denken wir uns zwischen A und B eine andre beliebige Curve gezogen, nehmen auf dieser in der Nähe von A einen Punkt A_1 an und legen durch A_1 und B die Cycloide, welche die x-Achse in A' trifft. In A_1 gehe der bewegliche Punkt mit einer Anfangsgeschwindigkeit aus, welche gleich derjenigen ist, die er in gleicher Tiefe unter der Horizontalen haben würde, wenn er auf der zwischen A und B gezogenen Cycloide herabfiele. Bezeichnen wir dann mit:

T_0 die Fallzeit zwischen A und B auf dem Cycloidenbogen AB
T_0' " " " A " B " der beliebigen Curve AB
T " " " A_1 " B " dem Cycloidenbogen A_1B
T' " " " A_1 " B " der beliebigen Curve A_1B



so ist, wie früher bewiesen, $T' > T$, also auch, wenn wir $\bar{T} = T_{01}' + T'$ setzen, $\bar{T} > T + T_{01}'$. Lassen wir jetzt den Punkt A_1 mehr und mehr dem Punkte A sich nähern, so nähert sich T der Grenze T_{01}, während T_{01}' beliebig klein wird. Folglich ist $\bar{T} \geqq T_{01}$. Man kann aber auch leicht zeigen, dass in der That $\bar{T} > T_{01}$ ist. Sobald nämlich ein Curvenstück nicht die Eigenschaft besitzt, dass längs desselben $G = 0$ ist, so kann es immer so variirt werden, dass die Aenderung des Integrals irgend ein Zeichen erhält. Wenn demnach nicht längs der ~~selben~~ ganzen Curve $A A_1 B$ die Gleichung $G = 0$ erfüllt ist, so kann man eine andere Curve substituiren, für welche wenn $\bar{\bar{T}}$ der ihr zukommende Wert des Integrals ist, $\bar{\bar{T}} < \bar{T}$ ist. Da nun aber auch $\bar{\bar{T}} \geqq T_{01}$ ist, so folgt $\bar{T} > T_{01}$. Wäre aber längs der Curve $A A_1 B$ überall $G = 0$ so bestände $A A_1 B$ aus mehreren Cycloidenbogen; denn wäre es einer, so müsste $A A_1 B$ mit $A B$ identisch sein. Diese Bogen müssen aber in dem Punkte, wo sie zusammenstossen, verschiedene Tangenten haben; denn da dieser Punkt nicht auf der x-Achse

liegen kann, so wären die beiden Bogen, welche in dem Punkte ihres Zusammentreffens dieselbe Richtung haben, Stücke einer und derselben Cycloide. Wären aber Ecken vorhanden, so könnte man dieselben so abrunden, dass mit gleicher Geschwindigkeit ein kürzerer Weg zwischen den beiden Endpunkten und letzterer somit auch in kürzerer Zeit zurückgelegt würde. Alsdann könnten wir wieder dieselben Schlüsse machen. Es bietet also die Cycloide zwischen den Punkten A und B auch dann noch ein Minimum dar, wenn der Punkt A ein singulärer also der sich bewegende Punkt von A mit der Geschwindigkeit o ausgeht.

Wenn B ein singulärer Punkt ist, so lassen sich dieselben Überlegungen anstellen; denn es ist ganz gleichgültig, ob der Punkt von A nach B steigt, oder von B nach A fällt, wenn man ihn nur mit derselben Anfangsgeschwindigkeit zurücklaufen lässt, mit welcher er in B angekommen ist. Beim Rückweg wird er am Ende wieder die ursprüngliche Anfangsgeschwindigkeit erreicht haben; seine Geschwin-

digkeit ist in demselben Punkte für beide Fälle dieselbe, nur nach entgegengesetzten Seiten gerichtet. Das Integral hat für dieselbe Curve beide Male denselben Wert. Dieselbe Curve, die in dem einen Falle das Integral zu einem Minimum macht, thut es daher auch im zweiten Falle.

Die dritte Aufgabe bietet zu einer besonderen Bemerkung keinen Anlass mehr.

Hiermit ist die Lösung der eingangs der allgemeinen Theorie aufgestellten drei Probleme vollständig durchgeführt; zugleich ist damit der eine Hauptteil der Variationsrechnung beendet. Wir wenden uns jetzt zu dem andern Hauptteil, welcher die theoretische und practische Lösung von Aufgaben zum Gegenstande hat, als deren allgemeiner Typus die Aufgabe IV Cap. 4. aufgestellt worden ist.

III. Haupttheil.

Relative Maxima und Minima.

Capitel 13.

Skizzirung der Aufgabe. Aufstellung der notwendigen Bedingungen.

Man kann die im Vorhergehenden behandelte Aufgabe nach verschiedenen Seiten hin verallgemeinern und zwar bietet sich zunächst dar die Ausdehnung derselben vom Gebiete von 2 auf ein Gebiet von n Veränderlichen. Für ein solches würde diese Aufgabe folgendermassen lauten: Es sollen n Grössen $x_1\, x_2 \ldots x_n$ als Functionen einer Grösse t so bestimmt werden, dass für das durch die Gleichungen $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t), \ldots x_n = x_n(t)$ definirte analytische Gebilde der Wert des Integrales

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x_1\, x_2 \ldots x_n\,,\, x_1'\, x_2' \ldots x_n')\, dt$$

ein Maximum oder Minimum sei, d. h. dass, wenn man jenes analytische Gebilde unendlich wenig variirt, die dadurch hervorgebrachte Änderung des Integrals im Falle des Maximums beständig negativ, im Falle des Minimums beständig po-

sitiv sei. Die Behandlung dieser Aufgabe ist durchaus der der früheren analog und bietet keine Schwierigkeiten.

Bei der eben erwähnten Aufgabe sowohl als bei der früheren ist aber stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dass keine im Voraus gegebenen Beziehungen zwischen den Veränderlichen $x_1 x_2 \ldots x_n$ stattfinden sollen. Indessen liefert die Natur der meisten hierher gehörigen Aufgaben solche Nebenbedingungen, durch welche die Willkürlichkeit der unendlich kleinen Variationen des analytischen Gebildes beschränkt wird. Die Aufgaben sind zwar die schwierigsten, aber auch zugleich die interessantesten, welche in der Variationsrechnung vorkommen.

Die zu der Forderung des Maximums oder Minimums hinzutretenden Bedingungen sind im Allgemeinen von doppelter Natur:

Einmal nämlich kann verlangt werden, dass die Veränderlichen $x_1 x_2 \ldots x_n$ gewissen Bedingungsgleichungen $f_1(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0, \ldots f_m(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0$ Genüge leisten sollten. Eine solche Aufgabe haben wir bereits in dem Problem der kürzesten Linie auf einer Fläche behandelt; wir lösten dieselbe

dadurch, dass wir für die drei Veränderlichen $x\,y\,z$ Functionen zweier Grössen u und v setzen, welche die Gleichung der Fläche identisch befriedigten; dadurch führten wir das gegebene Problem auf ein anderes zurück, in welchem die Veränderlichen keiner Beschränkung mehr unterworfen waren. – Ebenso kann man nun in dem allgemeinen Falle von n Veränderlichen bei $m < n$ gegebenen Bedingungsgleichungen verfahren, indem man nämlich an Stelle der ursprünglichen Veränderlichen ein System von unabhängigen Bestimmungsstücken d.h. Functionen von $n-m$ neuen Veränderlichen von der Beschaffenheit einführt, dass durch Substitution derselben die gegebenen Bedingungsgleichungen identisch erfüllt werden, hat man das gegebene Problem auf ein anderes zurückgeführt, in welchem die Veränderlichen keiner Beschränkung mehr unterliegen.

Andererseits kann man aber auch verlangen, dass das gesuchte Maximum oder Minimum die Bedingung erfülle, dass gleichzeitig ein anderes gegebenes Integral einen vorgeschriebenen Wert erhält. Diese Fälle sind es besonders, welche

man mit dem Namen der relativen Maxima und Minima bezeichnet und die eine etwas andere Behandlung erfordern. Beschränken wir uns wieder auf das Gebiet zweier Veränderlichen, so können wir die vorliegende Aufgabe so ausdrücken:

Es seien $F^0(xy, x'y')$ und $F^1(xy\,x'y')$ zwei Functionen von derselben Beschaffenheit wie die bisher betrachtete Function $F(xy, x'y')$. Es sollen x und y als Functionen einer Grösse t so bestimmt werden, dass für die durch die Gleichungen $x = x(t)$, $y = y(t)$ definirte Curve das Integral

$$1)\quad I^0 = \int_{t_0}^{t_1} F^0(xy, x'y')\,dt$$

ein Maximum oder Minimum wird, während gleichzeitig für sie das Integral

$$2.)\quad I^1 = \int_{t_0}^{t_1} F^1(xy, x'y')\,dt$$

einen vorgeschriebenen Wert erhält, d.h. es soll für jede unendlich kleine Variation der Curve, für welche das zweite Integral seinen Wert unverändert beibehält, das erste Integral, je nachdem ein Maximum oder Minimum stattfinden soll, beständig kleiner oder beständig grösser sein, als für die durch die Gleichungen $x = x(t)$, $y = y(t)$ gegebene Curve.

Wir zeigen zunächst, dass man solche Variationen der Curve, für welche I' seinen Wert beibehält, analytisch darstellen kann. Dabei kommt es zunächst nicht darauf an, alle solche Variationen herzustellen, sondern nur nachzuweisen, dass es deren wirklich giebt. Wir bedienen uns dabei der bereits früher angewandten Bezeichnungen und unterscheiden die auf die Integrale I^0 und I^1 bezüglichen Grössen durch Beifügung des Index 0 oder 1.

Betrachtet man an Stelle der Curve $x\,y$ die unendlich kleine Variation $x+\xi$, $y+\eta$ derselben, so ist die dadurch hervorgerufene Variation des zweiten Integrals dargestellt durch:

$$3)\quad \Delta I' = \int_{t_0}^{t_1} G'\, w\, dt + \int_{t_0}^{t_1} \left(\xi, \eta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}\right)_2 dt$$

Wir zeigen jetzt, dass man ξ und η stets so bestimmen kann, dass $\Delta I' = 0$ ist. Dazu setzen wir:

$$4)\quad \xi = \kappa u + \kappa_1 u_1 + \kappa_2 u_2 + \dots$$

$$\eta = \kappa v + \kappa_1 v_1 + \kappa_2 v_2 + \dots,$$

wo die κ beliebige Constanten bedeuten und die u und v beliebige Functionen von t sein sollen, welche für $t = t_0$ und $t = t_1$ verschwinden. Setzt man dann

$$\bar{w}_i = y' u_i - x' v_i,$$

so wird:

$$w = \kappa \bar{w} + \kappa_1 \bar{w}_1 + \kappa_2 \bar{w}_2 + \dots$$

und

$$\Delta J = \kappa \int_{t_0}^{t_1} G' \bar{w}\, dt + \kappa_1 \int_{t_0}^{t_1} G' \bar{w}_1\, dt + \kappa_2 \int_{t_0}^{t_1} G' \bar{w}_2\, dt + \dots + (\kappa \kappa_1 \kappa_2 \dots)_2$$

Setzt man nun:

$$5)\quad W_i' = \int_{t_0}^{t_1} G' \bar{w}_i\, dt,$$

so kommt

$$\Delta J' = \kappa\, W' + \kappa_1\, W_1' + \kappa_2\, W_2' + \dots + (\kappa \kappa_1 \kappa_2 \dots)_2 .$$

Die Functionen W_i' sind hierin vollkommen bestimmte Functionen, sobald über die Functionen u und v eine Entscheidung getroffen ist. Damit nun $\Delta J' = 0$ sei, muss die rechte Seite dieser Gleichung verschwinden, also:

$$\kappa\, W' + \kappa_1\, W_1' + \kappa_2\, W_2' + \dots + (\kappa \kappa_1 \kappa_2 \dots)_2 = 0$$

sein. Ist nun irgend eine der Functionen W_i' z. B. W_λ' von Null verschieden, so kann mittelst dieser Gleichung κ_λ als Potenzreihe der übrigen κ dargestellt werden, welche convergirt, sobald die κ hinreichend klein gewählt werden. Es kann daher die Gleichung $\Delta J' = 0$ stets für gewisse hinreichend kleine Wertsysteme der κ befriedigt werden. Setzt man diese Wertsysteme in 4) ein, so ist also bewiesen, dass unendlich kleine Variationen der Curve $x = x(t)$, $y = y(t)$ existiren und analytisch darstellbar sind, für welche das Integral J' seinen Wert nicht ändert.

Nur in einem Falle ist dieser Beweis hinfällig, nämlich dann, wenn alle Functionen W_1', W_1', W_2' ... für beliebige u und v verschwänden. Wäre dies aber stets der Fall, wie man auch u und v wählen möge, so müsste längs der ganzen Curve $G'=0$ sein. Dies würde aber eine der notwendigen Bedingungen sein dafür, dass das zweite Integral ebenfalls einen Maximal- oder Minimalwert besitzt. Träte nun für die durch Auflösung der Differentialgleichung $G'=0$ sich ergebende Curve ein Maximum oder Minimum des zweiten Integrals wirklich ein, so wäre es doch im Allgemeinen gar nicht möglich, die Curve so zu variieren, dass das zweite Integral seinen Wert beibehält. Wären aber zufällig mit der Bedingung $G'=0$ zugleich alle übrigen Bedingungen der Aufgabe erfüllt, so müssten wir diese Aufgabe hier, wo es sich um eine allgemeine Theorie der hier characterisirten Aufgaben handelt, von vornherein ausschliessen und einer gesonderten Betrachtung überlassen.

Bei den hier zu behandelnden Aufgaben ist es also stets möglich, die Variationen ξ und η, d. h. die Functionen u_i und v_i so zu wählen, dass die k

in der angegebenen Weise bestimmt werden können. Wir beschränken uns auf den einfachsten Fall und setzen:

$$\xi = \kappa u + \kappa_1 u_1$$
$$\eta = \kappa v + \kappa_1 v_1$$
$$w = \kappa \bar{w} + \kappa_1 \bar{w}_1$$

Die Grössen $u\, u_1$, $v\, v_1$ sollen an den Grenzen verschwinden und so gewählt sein, dass W_1' innerhalb der Integrationsgrenzen nicht verschwindet. Dann kann man aus der Gleichung

$$\kappa W' + \kappa_1 W_1' + (\kappa, \kappa_1)_2 = 0$$

κ_1 für kleine Werte von κ als Potenzreihe von κ darstellen wie folgt:

$$\kappa_1 = \frac{W'}{W_1'} \kappa + \kappa \mathfrak{P}(\kappa),$$

wo $\mathfrak{P}(\kappa)$ mit κ verschwindet. Hieraus ergiebt sich

$$\xi = \kappa \left(u - \frac{W'}{W_1'} u_1\right) + \kappa u_1 \mathfrak{P}(\kappa)$$
$$\eta = \kappa \left(v - \frac{W'}{W_1'} v_1\right) + \kappa v_1 \mathfrak{P}(\kappa)$$

Wenden wir dieselben Variationen $\xi\, \eta$ auf das erste Integral J^0 an, so folgt

$$\Delta J^0 = \kappa W^0 + \kappa_1 W_1^0 + (\kappa \kappa_1)_2$$
$$= \kappa \left(W^0 - \frac{W'}{W_1'}\right) + (\kappa)_2$$

Soll also für die betrachtete Curve das Inte-

-gral J^0 zu einem Maximum oder Minimum werden, d. h. soll für die Variationen $\xi\ \eta$ der Curve, wie sie durch 6) dargestellt werden, die vollständige Variation ΔJ^0 des Integrals 1) beständig negativ oder positiv sein, so muss als erste notwendige Bedingung hierfür der Coefficient von κ in ΔJ^0 verschwinden, da man sonst, je nachdem man κ positiv oder negativ wählt, Variationen der Curve angeben kann, für welche ΔJ^0 positiv, und andere, für welche ΔJ^0 negativ ist. Es muss also die Gleichung bestehen:

$$\frac{W^0}{W^1} = \frac{W_1^0}{W_1^1}$$

Der Quotient $\frac{W^0}{W^1}$ ist demnach unabhängig von den willkürlichen Functionen u und v, denn er ändert sich nicht, wenn man die Functionen u und v von t durch andere, nämlich u_1 und v_1 ersetzt. Der Wert des Quotienten hängt also nur von der Natur der Curve $x(t)\ y(t)$ ab.

Die Richtigkeit dieser Schlüsse ist jedoch noch von einer Voraussetzung über die Functionen $u\ v\ u_1\ v_1$ abhängig. Die Darstellung

der vollständigen Variation in der Form

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} G\, w\, dt + \int_{t_0}^{t_1} \left(\xi\, \eta\, \frac{d\xi}{dt}\, \frac{d\eta}{dt} \right)_2 dt$$

ist nämlich nur möglich, wenn die betrachtete Curve innerhalb des Intervalles $t_0 \ldots t_1$ keine plötzliche Richtungsänderung erfährt; denn an einer Stelle t', wo eine solche plötzliche Richtungsänderung eintritt, treten noch Glieder hinzu von der Form:

$$\left(\left(\frac{dF}{dx'} \right)_{t'}^{-} - \left(\frac{dF}{dx'} \right)_{t'}^{+} \right) \xi_{t'} + \left(\left(\frac{dF}{dy'} \right)_{t'}^{-} - \left(\frac{dF}{dy'} \right)_{t'}^{+} \right) \eta_{t'}$$

Um diese Glieder zu vermeiden, setzen wir fest, dass $u\, v\, u_1\, v_1$ nicht nur an den Grenzen t_0 und t_1, sondern auch an allen diesen Unstetigkeitsstellen verschwinden sollen. Alsdann bleiben unsere Schlüsse bestehen.

Wir bezeichnen den Quotienten $\frac{W^0}{W_1}$ mit λ und haben also:

$$W^0 - \lambda W^1 = 0$$

oder wenn wir für W^0 und W^1 ihre Werte setzen:

$$\int_{t_0}^{t_1} (G^0 - \lambda G^1)\, w\, dt = 0$$

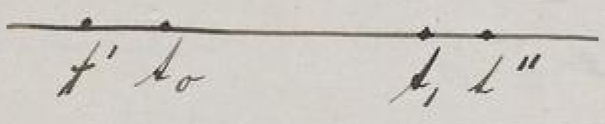
Hieraus folgt, da w eine willkürliche Function ist, die nur an den Grenzen und ausserdem

vielleicht noch an einigen Stellen, aber sicher nicht für das ganze Intervall $t_0 \dots t_1$ verschwindet, dass:

$$G^0 - \lambda G' = 0$$

sein muss.

Von der Constanten λ lässt sich nun der wichtige Satz beweisen, dass der Wert von λ ein und derselbe ist für die ganze Curve, dass man also immer zu demselben Wert von λ kommt, welchen Teil der Curve $x = x(t)$, $y = y(t)$ man auch variiren mag. Dies lässt sich folgendermassen einsehen: Wir denken uns die Werte von t auf einer geraden Linie abgetragen. Es möge dann λ für eine Strecke $t_0 \dots t_1$, welche also einem gewissen Curvenstück entspricht, einen bestimmten Wert haben. Dieser ist, wie bewiesen werde, unabhängig von der Art der Variation dieses Stückes. Fassen wir nun das Stück $t' \dots t''$ ins Auge, welches das erste Stück einschliesst, so gehört zu den möglichen Variationen dieser



Strecke doch auch die, bei der $t' \dots t_0$ und $t_1 \dots t''$ ungeändert bleiben und nur $t_0 \dots t_1$ variirt wird. Da nun λ für die Strecke $t' \dots t''$ einen ganz bestimmten von der

Art der Variation unabhängigen Wert besitzt, so muss λ eben denselben Wert haben, wie für die Strecke $t_0 \dots t_1$. Man kann somit, wenn man zuerst nur für einen beliebig kleinen Teil der Curve den zugehörigen Wert von λ gefunden hat, die Grenzen des Integrals weiter hinausschieben, ohne den Wert von λ zu ändern. Daraus folgt, dass auch für zwei Teile der Curve, von denen keiner den andern einschliesst, der Wert von λ derselbe ist. In dieser Weise ergiebt sich also, dass λ für die ganze Curve denselben Wert besitzt.

Die sich so für die Curve ergebende Differentialgleichung $G^0 - \lambda G' = 0$ ist dieselbe wie die, welche wir erhalten würden, wenn es sich darum handelte, das Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} F(x\,y,\,x'\,y')\,dt,$$

worin F die Function $F^0 - \lambda F'$ bedeuten soll, zu einem Maximum oder Minimum zu machen. Diese Differentialgleichung liefert uns x und y als Functionen von t und λ und zwei Integrationsconstanten α und β, also

$$x = \varphi(t, \alpha, \beta, \lambda), \quad y = \psi(t, \alpha, \beta, \lambda)$$

und die hierdurch dargestellte Curve repraesen-

tirt die Lösung der Aufgabe, wenn überhaupt eine solche möglich ist. Die Constanten α und β bestimmen sich dadurch, dass die Curve durch zwei feste Punkte gehen soll, die Grösse λ dadurch, dass das Integral J' einen vorgeschriebenen Wert besitzen muss.

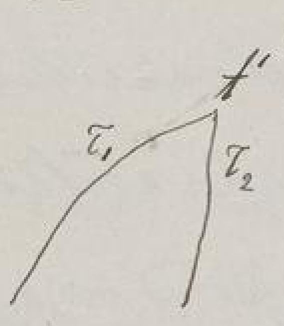
Wir können nun die vorliegende Aufgabe noch in mannigfacher Weise compliciren. Wir haben bisher den Variationen der Curve nur dadurch gewisse Beschränkungen auferlegt, dass wir festsetzten, es sollen die Endpunkte und gewisse andere Punkte der Curve, in denen sie ihre Richtung sprungweise ändert, nicht variirt werden.

Doch kann man der Curve noch mannigfache andere Bedingungen auferlegen, z. B. verlangen, dass sie beliebig gegebene feste Punkte oder Strecken in sich aufnehmen oder innerhalb eines abgegrenzten Gebietes verlaufen solle. Dabei kann es geschehen, dass die Curve zur Grenze dieses Gebietes sich erstreckt, dieselbe berührt oder teilweise mit ihr zusammenfällt. In allen diesen Fällen giebt es Stellen der Curve, welche nicht frei variirbar

sind; wir verstehen nämlich unter einer frei variirbaren Stelle eine solche, welche durch Variationen in jede beliebige Stelle ihrer Umgebung übergehen kann. Die Stellen an der Grenze sind offenbar nicht in dieser Weise frei variirbar, da sie gezwungen sind, an der Grenze zu bleiben oder wenigstens dieselbe nicht überschreiten dürfen. Welche Beschränkungen man aber auch der Curve auferlegen möge, es gilt stets der Satz, dass alle frei variirbaren Stellen ... und solche muss es selbstverständlich in jedem Falle geben ... der Differentialgleichung $G^0 - \lambda G^1 = 0$ genügen und dass für alle der Werth der Constanten λ derselbe ist. Der Beweis dieses Satzes ist aber leicht zu führen; man braucht ja nur den Functionen $u\ v\ u_1\ v_1$ ausser den früheren Bedingungen noch die folgende aufzuerlegen, dass sie für alle nicht frei variirbaren Stellen verschwinden sollen. Es werden uns dann die oben angewandten Schlüsse auch hier zum Ziele führen. Dieser Satz ist für die Lösung vieler Aufgaben von der weittragendsten Bedeutung.

Wir beweisen jetzt einen zweiten wichtigen Satz, der uns in vielen Fällen darüber Auf-

schluss geben wird, ob die Curve innerhalb einer frei variirbaren Strecke eine plötzliche Richtungsänderung erfahren kann oder nicht. Angenommen, es fände an einer frei variirbaren Stelle $t = t'$ eine plötzliche Richtungsänderung der Curve statt, so nehme man zu



beiden Seiten von t' zwei Punkte τ_1 und τ_2 so nahe bei t' an, dass innerhalb der Strecken $\tau_1 \ldots t'$ und $t' \ldots \tau_2$ eine derartige Unstetigkeit in der Änderung der Richtung der Tangente nicht mehr stattfindet. Dann kann man die Variationen der Curve unter andern so vornehmen, dass die ganze Curve ungeändert bleibt und nur die Strecke $\tau_1 \ldots \tau_2$ variirt wird, natürlich so, dass dabei das zweite Integral seinen Wert beibehält. Die Variation des Integrals I^0 rührt dann nur her von der Variation der Integralsumme

$$\int_{\tau_1}^{t'} F^0(x\,y, x'y')\,dt + \int_{t'}^{\tau_2} F^0(x\,y, x'y')\,dt$$

Die Strecke $\tau_1 \ldots \tau_2$ variiren wir nun wieder so, dass wir setzen:

$$\xi = \kappa u + \kappa_1 u_1$$
$$\eta = \kappa v + \kappa_1 v_1,$$

dabei aber neben den früheren Bedingungen noch

die weiteren annehmen, dass für τ_1 und τ_2 $u v u_1 v_1$ verschwinden sollen, ebenso für t' $u u_1 v_1$ dagegen nicht v. Man kann dann immer κ_1 als Potenzreihe von κ so bestimmen, dass für diese Variationen $\Delta J^1 = 0$ ist. Bezeichnen wir im Folgenden überall da, wo nicht ausdrücklich das Gegenteil hervorgehoben wird, einen Ausdruck von der Form $\phi^0 - \lambda \phi'$ mit ϕ, so erhalten wir, da die Grenzen der Integrale zum Teil mit variirt werden, analog wie pag. für die vollständige Variation:

$$\Delta J^0 = \kappa \int_{\tau_1}^{t_1} G \bar{w}\, dt + \kappa \int_{t'}^{\tau_2} G \bar{w}\, dt + \Big[(u - \lambda u_1) \frac{dF}{dx'} + (v - \lambda v_1) \frac{\partial F}{\partial y'} \Big]_{\tau_1}^{t'} K$$

$$+ \Big[(u - \lambda u \frac{\partial F}{\partial x'} + (v - \lambda v_1) \frac{\partial F}{\partial y'} \Big]_{t'}^{\tau_2} K + k(K)$$

Ist die Curve so beschaffen, dass sie das Maximum oder Minimum für J^0 darbietet, so müssen die Glieder erster Dimension verschwinden. Da nun die Curve alsdann der Gleichung $G = 0$ genügt und da ferner $u u_1 v v_1$ für τ_1 und τ_2 und $u u_1 v_1$ für t' verschwinden, so folgt:

$$\overset{v}{t'} \Big\{ \Big(\frac{dF}{\partial y'} \Big)^{-}_{t'} - \Big(\frac{dF}{\partial y'}^{+} \Big)_{t'} \Big\} = 0$$

Eine analoge Gleichung für x' hätten wir erhalten, wenn wir angenommen hätten, dass

für $t = t'$ $v = 0$ dagegen u von 0 verschieden solle. Mithin ergiebt sich:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^-_{t'} = \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^+_{t'}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^-_{t'} = \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^+_{t'}$$

Wir erhalten somit den Satz:

Längs der frei variirbaren Teile der der Differentialgleichung $G^0 - \lambda G^1 = 0$ genügenden Curve ändern sich die Grössen:

$$\frac{\partial (F^1 - \lambda F^1)}{\partial x'} \quad \text{und} \quad \frac{\partial (F^0 - \lambda F^1)}{\partial y'}$$

überall stetig; selbst da, wo innerhalb eines solchen Teiles eine plötzliche Richtungsänderung der Curve stattfindet.

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung der zweiten Variation.

Setzen wir voraus, dass die Variation an den Grenzen und an allen Stellen, wo eine Unstetigkeit der Richtung stattfindet, verschwinden und denken wir uns die Variation ξ η so gewählt, dass $\Delta J^1 = 0$ ist, so ist:

$$\Delta J^0 = \delta J^0 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(F_1^0\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + F_2^0 w^2\right)dt + \int_{t_0}^{t_1}\left(\xi\,\eta\,\frac{d\xi}{dt}\;\frac{d\eta}{dt}\right)_3 dt$$

$$0 = \delta J^1 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(F^1\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + F_2^1 w^2\right)dt + \int_{t_0}^{t_1}\left(\xi\,\eta\,\frac{d\xi}{dt}\;\frac{d\eta}{dt}\right)_3 dt$$

Hieraus folgt:

$$\Delta J^0 = \delta J^0 - \lambda \delta J^1 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(F_1\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + F_2 w^2\right)dt + \int_{t_0}^{t_1}\left(\xi\eta\frac{d\xi}{dt}\frac{d\eta}{dt}\right)_3 dt$$

Nun ist aber

$$\delta J^0 - \lambda \delta J^1 = \int_{t_0}^{t_1}(G - \lambda G^1)\, w\, dt = 0$$

folglich:

$$\Delta J^0 = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(F_1\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + F_2 w^2\right)dt + \int_{t_0}^{t_1}\left(\xi\eta\frac{d\xi}{dt}\frac{d\eta}{dt}\right)_3 dt$$

Genau so wie früher kann man nun das erste Glied der rechten Seite dieser Gleichung umformen in:

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} F_1\left(\frac{dw}{dt} - \frac{w}{u}\frac{du}{dt}\right)^2 dt,$$

wo man u aus der Differentialgleichung

$$F_1\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{dF_1}{dt}\frac{du}{dt} - F_2\, u = 0$$

zu bestimmen hat. Auch hier folgt dann wie früher als notwendige Bedingung für die Existenz eines Maximums oder Minimums, dass F_1 in allen Fällen Teilen der Curve, welche frei variirt werden können, im ersten Falle überall negativ, im zweiten Falle überall positiv und von 0 und ∞ verschieden sein muss. Damit ferner jene Transformation der zweiten Variation möglich sei, muss sich vorstehende Differentialgleichung so integriren lassen, dass u auf

allen frei variirbaren Teilen der Curve von o verschieden ist.

Ob die so gefundenen drei notwendigen Bedingungen auch hinreichend sind für die Existenz eines Maximums oder Minimums des ersten Integrals, soll später entschieden werden. Wir wollen aber an einem Beispiele zeigen, dass wenn es überhaupt eine Curve giebt, für welche unter der Bedingung, dass das zweite Integral einen gegebenen Wert hat, das erste Integral ein Maximum oder Minimum ist, diese Curve vermittelst dieser Bedingungen sich muss bestimmen lassen.

Capitel 14.

Das isoperimetrische Problem.

Allgemein ausgedrückt lautet das isoperimetrische Problem folgendermassen:

Man denke sich in der Ebene irgend einen Teil von der Beschaffenheit abgegrenzt, dass man von jedem Punkte desselben zu jedem andern gelangen kann, ohne die Grenze zu überschreiten. Es soll in diesem Teile eine in sich zurücklaufende Linie construirt werden, welche eine gegebene Länge hat und einen möglichst grossen Flächenraum einschliesst.

Denkt man sich x und y als solche Functionen von t, dass für zwei bestimmte Werte t_0 und t_1 die zugehörigen Punkte $x\,y$ zusammenfallen, und dass, während t von dem kleineren Werte t_0 zu dem grösseren t_1 übergeht, der Punkt $x\,y$ die ganze Curve vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt in positivem Sinne durchläuft, so wird der Flächeninhalt der Curve, auch in dem Falle, wo sie sich selber schneidet, ausgedrückt werden durch das Integral:

$$1.)\quad J^{I} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (xy' - yx')\,dt$$

und ihr Umfang durch das Integral

$$2.)\quad J^{II} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$$

Die gestellte Aufgabe nun darin, x und y als Functionen von t zu bestimmen, dass das erste Integral einen möglichst grossen und zugleicher Zeit das zweite Integral einen gegebenen Wert erhält. Es ist dabei, obwohl dem Anschein nach das Gegenteil stattfinden sollte, vollkommen gleichgiltig, wo der Anfangspunkt der Coordinaten angenommen wird; denn durch Verlegung desselben ändert sich das zweite Integral gar nicht, das erste aber nur um eine Constante, wodurch die Maximaleigenschaft desselben nicht alterirt wird.

Ferner kann man noch weitere Bedingungen hinzufügen, also etwa verlangen, dass die Curve durch gewisse der Reihenfolge nach gegebene Punkte hindurchgehen oder gewisse Strecken in vorgeschriebener Aufeinanderfolge in sich aufnehmen solle. Die Curve würde dann Stücke enthalten, die nicht frei variirbar wären.

Die Function F ist in unserem Falle

$$F = \frac{1}{2}(xy' - yx') - \lambda\sqrt{x'^2 + y'^2}$$

An Stelle dieser können wir aber sogleich eine andere setzen. Es ist nämlich:

$$\frac{d(xy)}{dt} = xy' + yx'$$

also

$$\frac{1}{2}(xy' - yx') = \frac{1}{2}\frac{d(xy)}{dt} - yx'$$

Integrirt man dies zwischen t_0 und t_1, so fällt der erste Teil rechterseits weg, da End und Anfangspunkt der Curve zusammenfallen, und es ist:

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(xy' - yx')\,dt = -\int_{t_0}^{t_1} yx'\,dt$$

Man kann daher als Function F die folgende nehmen:

$$3.)\quad F = -yx' - \lambda\sqrt{x'^2 + y'^2}$$

und hieraus folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = -y - \lambda\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = -\lambda\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

Da sich nun, wie bewiesen wurde, $\frac{\partial F}{\partial x'}$ und $\frac{\partial F}{\partial y'}$ innerhalb eines frei variirbaren Teiles der Curve stetig ändern, da ferner λ für die ganze Curve einen und denselben constanten Wert besitzt, und die mit λ multiplicirten Grössen nichts anderes sind, als die Richtungscosinus der Tangente der Curve, so folgt hieraus, dass die Curve überall * mit der Grenze zusammenläuft, ihre Richtung

* da, wo sie frei variirt werden kann und nicht

stetig ändert.

Für F_1 ergiebt sich der Ausdruck:

$$4)\quad F_1 = -\frac{\lambda}{\sqrt{x'^2+y'^2}^{\,3}}$$

F_1 ändert also sein Zeichen nicht. Da ein Maximum stattfinden soll, also F_1 beständig negativ sein muss, so ist λ eine positive Constante. – Um nun die Curve selbst zu finden, hätte man die Differentialgleichung $G^0 - \lambda G' = 0$ zu integriren; dieselbe ist aber aequivalent jeder der beiden Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Da F die Grösse x nicht enthält, so ergiebt die erste dieser beiden Gleichungen:

$$5.)\quad \frac{\partial F}{\partial x'} = \text{const.}, \text{ also } y + \lambda \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = b$$

Da $\frac{\partial F}{\partial x'}$ sich innerhalb eines frei variirbaren Teiles der Curve stetig ändert, so hat b längs eines solchen denselben Wert, für verschiedene Teile der Curve aber kann b verschiedene Werte haben.

Nehmen wir nun als unabhängige Veränderliche, die vom Anfangspunkte aus in positivem Sinne erstreckte Bogenlänge, so folgt aus voriger Formel:

$$6.)\quad \frac{dx}{ds} = -\frac{1}{\lambda}(y-b)$$

und daher wegen $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$:

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 - \frac{1}{\lambda^2}(y-b)^2$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{1}{\lambda^2}(y-b) = \frac{1}{\lambda}\frac{dx}{ds}$$

also:

$$7.)\ \frac{dy}{ds} = \frac{1}{\lambda}(x-a)$$

Mithin ist die Gleichung der Curve:

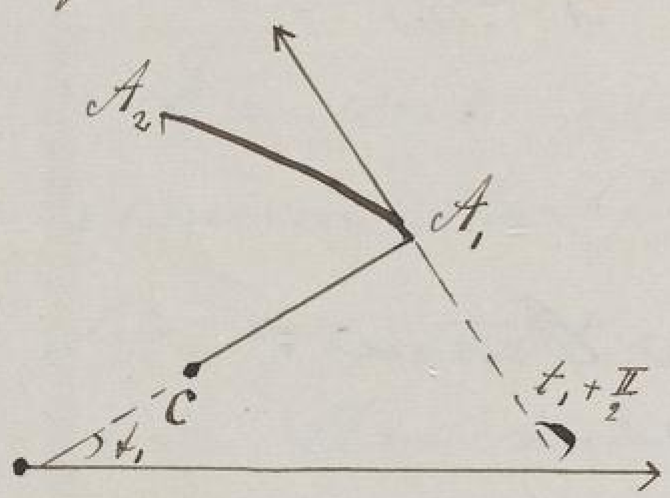
$$8)\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = \lambda^2$$

Man ersieht hieraus, dass die Forderung, λ solle eine positive Constante sein, durch die Natur der Curve von selbst erfüllt ist. Ferner ergiebt sich, was bereits Steiner gezeigt hat, dass die frei variirbaren Teile der Curve Bögen gleicher Kreise sein müssen, deren Mittelpunkte aber verschieden sein ~~müssen~~, können. Ein jeder solcher Kreisbogen kann aber noch auf verschiedenen Seiten der die Endpunkte verbindenden Sehne liegen; es ist daher noch zu untersuchen, welcher von beiden Bögen der richtige ist. Die Differentialgleichung der Curve wird integrirt durch

$$x - a = \lambda \cos\frac{s-s_0}{\lambda} = \lambda\cos t;\quad y - b = \lambda\sin\frac{s-s_0}{\lambda} = \lambda\sin t,$$

denn hieraus folgen durch Differentiation wieder die Gleichungen 6) und 7). Da λ positiv ist, so wächst s zugleich mit t und da mit wachsen-

dem t der Kreis in positivem Sinne durchlaufen werden soll, so ist derjenige Bogen zu nehmen, für welchen dies der Fall ist. Es sei nun C der



Mittelpunkt des Kreises A_1 der Anfangs-, A_2 der Endpunkt des Bogens. Dann wird derjenige Bogen, der richtige sein, welcher auf der positiven Seite von CA_1 d. h. auf der Seite der wachsenden t liegt. Nun ist t_1 der Winkel, den der Radius CA_1 mit der x-Achse bildet, so ist

$$\cos t_1 = \frac{1}{r}(x_1 - a)$$
$$\sin t_1 = \frac{1}{r}(y_1 - b)$$

Ferner ist der Winkel, den die Tangente $A_1 B_1$ an den erwähnten Bogen im Punkte A_1 mit der x-Achse einschliesst: $t_1 + \frac{\pi}{2}$, also:

$$\cos\left(t_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t_1 = -\frac{1}{r}(y_1 - b) = \left(\frac{dx}{ds}\right)_1$$
$$\sin\left(t_1 + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t_1 = \frac{1}{r}(x_1 - a) = \left(\frac{dy}{ds}\right)_1$$

und diese Formeln sind in der That zeichenrichtig, was nicht der Fall sein würde, wenn man den andern Bogen also die entgegengesetzte Tangente genommen hätte. Es ist daher stets derjenige Bogen zu nehmen, welcher vom Mittelpunkte aus gesehen in positivem Sinne

durchlaufen wird.

Legen wir nun der Curve keine Bedingungen weiter auf und verlangen wir nun, unter allen isoperimetrischen Linien diejenige des grössten Flächeninhalts zu finden, so können wir natürlich nicht von einem absoluten Maximum in dem früheren Sinne reden, denn wir können ja die Curve, ohne ihre Gestalt zu ändern, noch beliebig in der Ebene verschieben. Die Aufgabe ist vielmehr strenger so zu fassen, dass das Integral, welches den Flächeninhalt ausdrückt, bei allen zulässigen Variationen niemals einen positiven Zuwachs erhalten solle. In derselben Weise haben wir schon in der Theorie der Maxima und Minima eine Aufgabe behandelt. Die so formulirte Aufgabe führt aber zu genau derselben notwendigen Bedingung wie vorher, dass nämlich die erste Variation verschwinden muss, und somit auch zu derselben Differentialgleichung. Man erhält auch dieselbe Bedingung für λ; denn da die zweite Variation jedenfalls nicht positiv werden und daher auch F_1 sein Zeichen nicht wechseln darf,

so schliessen wir wie vorher, dass λ positiv sein muss. Da die ganze Curve frei variirbar ist und somit $\frac{dF}{dx'}$ und $\frac{dF}{dy'}$ für ihren ganzen Verlauf stetig sind, so sind die Constanten a und b für die ganze Curve dieselben, sie bleiben jedoch unbestimmt. Wir können somit folgendes Resultat aussprechen: Wenn es überhaupt eine geschlossene Curve giebt, welche bei gegebenem Umfange den grössten Flächeninhalt einschliesst, so ist diese ein Kreis.

Dass nun aber der Kreis diese Eigenschaft wirklich hat, ist damit noch keineswegs bewiesen. Dazu würde aber auch die Betrachtung der zweiten Variation nicht ausreichen, denn bei derselben muss man sich doch immer auf die Untersuchung solcher Variationen beschränken, bei denen sowohl die Abstände entsprechender Punkte als auch die Differenzen der Richtungen in denselben eine gewisse Grösse nicht überschreiten und es bliebe also immer noch der Nachweis übrig, dass jede andre Curve, wo immer sie auch in der Ebene gezeichnet sein möge, einen kleineren Flächenraum begrenzt. Den Existenzbeweis

dieser Maximaleigenschaft des Kreises, welchen sämmtliche früheren Lösungen der Aufgabe zu führen unterlassen, hat man für so schwierig gehalten, dass man geradezu der Variationsrechnung die Mittel absprach, ihn zu führen. Wir werden jedoch zeigen, dass wir in früheren Sätzen bereits diese Mittel besitzen, und dass sie uns, ohne dass wir die zweite Variation irgendwie zu betrachten hätten, zum Ziele führen in allen Fällen, wo die Function F_1 nicht blos für alle Punkte der Curve sondern auch für beliebige Richtungen ihr Zeichen nicht wechselt. Diesen Nachweis soll jedoch erst in einem der späteren Capitel geführt werden.

Capitel 15.

Aufgabe: Diejenige Curve von gegebener Länge und gegebenen Endpunkten zu finden, deren Schwerpunkt am tiefsten liegt.

Wird die y-Achse vertikal nach oben gerichtet angenommen, und bezeichnet man mit S die Länge der ganzen Curve, mit ξ η die Coordinaten des Schwerpunktes, so bestimmt sich η aus der Gleichung:

$$\eta S = \int_{t_0}^{t_1} y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

wobei:

$$S = \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt,$$

und es ist die Aufgabe, x und y als Function von t so zu bestimmen, dass das erste Integral ein Minimum werde, während S einen gegebenen Wert besitzt. Die Eigenschaft, dass der Schwerpunkt möglichst tief liegt, muss auch für jeden einzelnen Teil der Curve erfüllt sein; denn wäre dies nicht der Fall, so könnte man ein Stück 12 der Curve durch ein Stück von derselben Länge aber mit tiefer liegendem Schwerpunkt ersetzen;

dadurch würde aber auch der Schwerpunkt der ganzen Curve tiefer rücken und es würde somit die ursprüngliche Curve die verlangte Minimaleigenschaft nicht besitzen.

Hier ist nun:

$$F^0 = y\sqrt{x'^2+y'^2}\,, \quad F^1 = \sqrt{x'^2+y'^2}$$

$$F = (y-\lambda)\sqrt{x'^2+y'^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{(y-\lambda)x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\,, \quad \frac{dF}{dy'} = \frac{(y-\lambda)y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

$$F_1 = \frac{y-\lambda}{\sqrt{x'^2+y'^2}^{\,3}}$$

Wir schliessen hier von vornherein den Fall aus, wo die beiden gegebenen Endpunkte der Curve in derselben Vertikallinie liegen, weil alsdann das Integral für S nicht in jedem Falle die absolute Länge der Curve darstellt, da es vorkommen kann, dass sich gewisse Teile der Curve selbst überdecken.

Ebenso schliessen wir den Fall aus, dass die gegebene Länge S gerade gleich der Verbindungsstrecke der beiden Punkte ist, da man in diesem die Curve gar nicht so variiren kann, dass das zweite Integral seinen Wert beibehält.

Da F_1 positiv sein muss, wenn ein Minimum eintreten soll, so muss $y-\lambda > 0$ sein. Da ferner $\frac{dF}{dx'}$ und $\frac{dF}{dy'}$ sich längs der ganzen Curve stetig ändert, und da diese Grössen proportional sind

den Richtungscosinus der Tangente der Curve, so folgt, dass die Curve ihre Richtung überall stetig ändert.

Die Function F ist dieselbe wie die Function F im Beispiel 1 pag. 79, nur dass hier $y-\lambda$ an die Stelle y getreten ist; da nun auch die sich ergebenden Differentialgleichungen dieselben sind wie damals, so erhält man als Gleichungen der gesuchten Curve die folgenden:

$$x = \alpha \pm \beta t$$
$$y = \lambda + \frac{\beta}{2}(e^{t} + e^{-t})$$

Die gesuchte Curve ist also wieder eine Kettenlinie. Da $y-\lambda > 0$ ist, so folgt, dass β eine positive Constante ist. Für S ergiebt sich der Wert:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = \frac{\beta}{2}\left((e^{t_1} - e^{-t_1}) - (e^{t_0} - e^{-t_0})\right)$$

Es ist nun zu untersuchen, ob und wie oft sich irgend zwei Punkte durch eine Kettenlinie verbinden lassen, welche die Länge S hat, d. h., ob und auf wie viel verschiedene Weisen es möglich ist, die Constanten $\alpha\ \beta\ \lambda$ durch S und die Coordinaten der gegebenen Punkte zu bestimmen. Sind die letzteren $a_0\, b_0$, $a_1\, b_1$, so ist:

$$a_0 = \alpha \pm \beta t_0, \qquad a_1 = \alpha \pm \beta t_1$$
$$b_0 = \lambda + \frac{\beta}{2}(e^{t_0} + e^{-t_0}) \qquad b_1 = \lambda + \frac{\beta}{2}(e^{t_1} + e^{-t_1})$$
$$S = (e^{t_1} - e^{-t_1}) - (e^{t_0} - e^{-t_0})$$

Hieraus folgt:

$$a_1 - a_0 = \pm \beta (t_1 - t_0)$$

$$b_1 - b_0 = \frac{\beta}{2} \left((e^{t_1} + e^{-t_1}) - (e^{t_0} + e^{-t_0}) \right)$$

Ist, wie wir voraussetzen, $t_1 > t_0$, so ist das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen, je nachdem $a_1 - a_0 > 0$ oder $a_1 - a_0 < 0$ ist. Offenbar kann man es stets einrichten, dass $a_1 - a_0 > 0$ ist, indem man eventuell den Punkt $a_1 b_1$ mit dem Punkte $a_1 b_1$ mit dem Punkte $a_0 b_0$ vertauscht und umgekehrt, es ist also dann das positive Vorzeichen anzuwenden. Setzt man:

$$\frac{t_1 - t_0}{2} = \mu, \quad \frac{t_1 + t_0}{2} = \nu$$

so ist μ, da $a_1 - a_0$ und β positive Grössen sind, ebenfalls eine positive Grösse und es wird:

$$a_1 - a_0 = 2 \mu \beta$$

$$b_1 - b_0 = \frac{\beta}{2} (e^{\mu} - e^{-\mu})(e^{\nu} - e^{-\nu})$$

$$S = \frac{\beta}{2} (e^{\mu} - e^{-\mu})(e^{\nu} + e^{-\nu})$$

$$\frac{b_1 - b_0}{S} = \frac{1 - e^{-2\nu}}{1 + e^{-2\nu}} = - \frac{1 - e^{2\nu}}{1 + e^{2\nu}}$$

$$\frac{d}{d\nu} \left(\frac{b_1 - b_0}{S} \right) = \frac{4}{(e^{\nu} + e^{-\nu})^2}$$

Da diese Ableitung beständig positiv ist, so nimmt der Ausdruck $\frac{b_1 - b_0}{S}$, während ν von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, ebenfalls beständig zu

und zwar läuft derselbe von -1 bis $+1$. Es giebt daher zu jedem reellen Werte von v einen und nur einen reellen zwischen -1 und $+1$ gegebenen Wert von $\frac{b_1 - b_0}{S}$ und umgekehrt zu jedem zwischen -1 und $+1$ gelegenen Werte von $\frac{b_1-b_0}{S}$ einen und nur einen reellen Wert von v. Da wir nun bereits oben den Fall ausgeschlossen haben, wo S gerade gleich der Verbindungsstrecke der gegebenen beiden Punkte ist, so ist S stets grösser als $|b_1 - b_0|$ und daher $\frac{b_1-b_0}{S}$ in der That stets ein echter Bruch; es ist somit v durch $\frac{b_1-b_0}{S}$ eindeutig bestimmt.

Ferner erhalten wir:

$$\frac{S}{a_1 - a_0} = \frac{e^{\mu} - e^{-\mu}}{2\mu} \cdot \frac{e^{v} + e^{-v}}{2}$$

oder:

$$\frac{2\mu}{e^{\mu} - e^{-\mu}} = \frac{a_1 - a_0}{S\sqrt{1 - \left(\frac{b_1 - b_0}{S}\right)^2}}$$

Die rechte Seite stellt eine gegebene positive Grösse dar, welche mit M bezeichnet werden möge. Nun ist:

$$\frac{d}{d\mu}\left(\frac{2\mu}{e^{\mu} - e^{-\mu}}\right) = -2\,\frac{(\mu-1)e^{\mu} + (\mu+1)e^{-\mu}}{(e^{\mu} - e^{-\mu})^2}$$

Wie oben gezeigt, ist μ stets grösser als 0. Liegt μ zwischen 0 und ∞, so ist die rechte Seite dieser Gleichung stets negativ. Da ferner der Differentialquotient des Ausdrucks $(\mu-1)e^{\mu} + (\mu+)e^{-\mu}$

stets grösser als 0 höchstens gleich 0 ist, während μ von 0 bis 1 geht, so wächst dieser Ausdruck, wenn μ von 0 bis 1 geht, fortwährend und ist, da er für $\mu = 0$ gleich 0 ist, stets positiv. Folglich ist auch für das Intervall $0 \ldots 1$ von μ der Differentialquotient von $\frac{2\mu}{e^{\mu} - e^{-\mu}}$ beständig negativ und somit:

$$\frac{d}{d\mu}\left(\frac{2\mu}{e^{\mu} - e^{-\mu}}\right) < 0 \quad \text{für } 0 < \mu < \infty$$

Somit nimmt der Ausdruck $\frac{2\mu}{e^{\mu} - e^{-\mu}}$ oder die Grösse M beständig ab und zwar von 1 bis 0, während μ von 0 bis ∞ läuft; daher giebt es zu jedem zwischen 0 und 1 gelegenen Werte von M stets einen und nur einen zwischen 0 und ∞ gelegenen Wert von μ. Da nun in der That bei unseren Voraussetzungen M ein positiver echter Bruch ist, so ist hiermit bewiesen, dass auch μ durch die gegebenen Grössen eindeutig bestimmt ist.

Durch μ und ν können aber auch $\alpha\ \beta\ \lambda$ aus den gegebenen Grössen eindeutig bestimmt werden und folglich ist, wenn S nur hinreichend gross gegeben wird, stets eine und nur eine Kettenlinie zwischen den gegebenen Punkten möglich, welche den gefundenen notwendigen Bedingungen

genügt. Wenn also überhaupt eine Curve existirt, welche das Problem löst, so muss es diese Kettenlinie sein. Es ist aber noch nicht erwiesen, dass wirklich für dieselbe das erste Integral ein Minimum wird. In einem der nächsten Capitel werden wir die hierzu erforderlichen Criterien entwickeln.

Capitel 16.

Unfreie Variationen.
(die Steiner'schen Sätze.)

Ist in der Ebene irgend ein Gebiet von der Beschaffenheit abgegrenzt, dass man von jedem Punkte desselben zu jedem andern gelangen kann, ohne die Grenze zu überschreiten, und soll in demselben eine geschlossene Linie gezogen werden, welche bei gegebener Bogenlänge einen möglichst grossen Flächenraum umschliesst, so wird diese Aufgabe allemal durch einen Kreis gelöst werden, sobald man mittelst der gegebenen Bogenlänge einen Kreis construiren kann, der sich ganz und gar in jenes abgegrenzte Gebiet hineinschieben lässt. Ist dieses aber nicht der Fall, so muss die Curve wenigstens an zwei Stellen die Grenze treffen oder ein Stück mit ihr zusammenlaufen. Denn da sie aus lauter Kreisbögen ~~von~~ gleichem Radius besteht, so müssten sich diese, im Falle die Grenze nicht getroffen wer-

den soll, mit unstetigen Richtungsänderungen aneinandersetzen, an solchen Stellen aber würde man ohne Veränderung der Bogenlänge den Flächeninhalt vergrössern können.

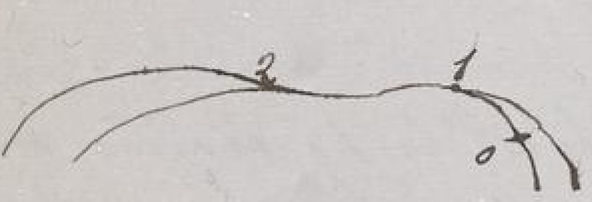
Über das Verhalten der Curve beim Zusammentreffen mit der Grenze hat nun Steiner die folgenden beiden Sätze aufgestellt:

1) Läuft die Curve eine Strecke lang mit der Begrenzungskurve zusammen, so sind die freien Teile derselben Bögen gleicher Kreise, welche die Grenze im Punkte ihres Zusammentreffens berühren.

2) Trifft die Curve mit der Begrenzung des Gebietes in einem Punkte zusammen und schliesst man diejenigen Variationen aus, bei denen die Curve die Grenze gar nicht trifft, so sind beide Teile der Curve Bögen gleicher Kreise und die Tangente dieser beiden im Treffpunkte bilden mit der Tangente der Begrenzungscurve in diesem Punkte gleiche Winkel.

Steiner der diese Sätze auf synthetischem Wege bewies, bemerkt dazu, dass ihm eine synthetisch-geometrische Behandlung dieser Art

von Aufgaben deshalb als notwendig erschei-
ne, weil die Variationsrechnung nicht aus-
reichende Mittel besitze, diese Sätze zu be-
gründen. Diese Bemerkungen waren zwar inso-
fern nicht ganz ungerechtfertigt, als man bis
dahin nur Curven betrachtet hatte, die
in ihrem ganzen Verlaufe der Differential-
gleichung genügten, und daher noch keine ana-
lytischen Hilfsmittel zur Untersuchung sol-
cher Curven hatte, die teilweise mit gegebe-
nen zusammenlaufen; unbegründet aber war
es, der Variationsrechnung überhaupt die
Mittel zur Behandlung derartiger Aufga-
ben abzusprechen. Wir werden vielmehr zei-
gen, dass sie diese Mittel besitzt, indem
wir für das allgemeine Problem im Falle
einer gegebenen Begrenzung über das Verhal-
ten der Curve an derselben zwei Sätze
beweisen, von denen die beiden von Stei-
ner für das isoperimetrische Problem ge-
gebenen nur specielle Fälle sind.



Es möge die der Differential-
gleichung genügende Curve
im Punkte 1 die Umgrenzung
treffen und bis 2 mit derselben zusammenlaufen.
~~treffen, und bis~~

Auf dem Teile der Curve, welcher durchlaufen wird, ehe sie Grenze in 1 trifft, wählen wir einen Punkt 0 so nahe bei 1, dass zwischen 0 und 1 keine plötzlichen Richtungsänderungen der Curve vorkommen. Das Stück 0 1 2 werde nun in der Art variirt, dass wir von 0 aus auf einem andern Wege entweder vor dem Punkte 1 oder hinter 1 die Grenze erreichen und von dort aus bis 2 auf der Grenze fortgehen. Nach den Entwickelungen auf pag. und Cap. 12 lassen sich Veränderungen, welche J und J' durch diese Variationen erleiden, folgendermassen ausdrücken: Versteht man unter p, q die Richtungscosinus der Tangente an die Strecke 01 im Punkte 1, unter $\bar{p}, \bar{q}$ die Richtungscosinus der Tangente an die Begrenzungscurve im Punkte 1 und endlich unter x, y die Coordinaten von 1 und unter σ das Bogenelement der Begrenzung, so ist

1.) wenn die Grenze vor dem Punkte 1 getroffen wird:

$$\Delta J^0 = \mathcal{E}^0(x, y, p, q, \bar{p}, \bar{q})\,\sigma + \int_{t_0}^{t_1} G^0 w\, dt + (\sigma)_2$$

$$\Delta J' = \mathcal{E}^1(x, y, p, q, \bar{p}, \bar{q})\,\sigma + \int_{t_0}^{t_1} G^1 w\, dt + (\sigma)_2$$

2.) Wenn die Grenze hinter dem Punkte 1 getroffen wird:

$$\Delta J^0 = -\mathcal{E}^0(x, y, p, q, \bar{p}, \bar{q})\,\sigma + \int_{t_0}^{t_1} G^0 w\, dt + (\sigma)_2$$

$$\Delta J' = -\mathcal{E}^1(x, y, p, q, \bar{p}, \bar{q})\,\sigma + \int_{t_0}^{t_1} G^1 w\, dt + (\sigma)_2$$

Sind nun diese Variationen von der Art, dass dieselben das Integral I^1 ungeändert lassen, so folgt hieraus, da $\int_{t_0}^{t_1}(G^0 - \lambda G^1)\, w\, dt = 0$ ist:

für Fall 1: $\Delta I^0 = \Delta I^0 - \lambda \Delta I^1 = (E^0 - \lambda E^1)\sigma + (\sigma)_2$

für Fall 2: $\Delta I^0 = \Delta I^0 - \lambda \Delta I^1 = -(E^0 - \lambda E^1)\sigma + (\sigma)_2$

Soll nun die Curve das Integral I^0 bei unverändertem I^1 zu einem Maximum oder Minimum machen, so muss ΔI^0 für beide Variationen dasselbe Vorzeichen haben. Folglich muss:

$$E^0 - \lambda E^1 = E(x_1, y_1, p_1, q_1, \bar{p}_1, \bar{q}_1) = 0$$

sein, weil man andernfalls σ so klein annehmen könnte, dass ΔI^0 das Vorzeichen des linearen Gliedes hätte, also einmal das positive, das andere Mal das negative.

Auf E^0 sowohl wie auf E^1 kann man nun die Umformungen von pag. . Cap 12 anwenden. Es wird somit

$$E(x_1, y_1, p_1, q_1, \bar{p}_1, \bar{q}_1) = (q_1 \bar{p}_1 - p_1 \bar{q}_1) \int_0^1 F_1(x_1, y_1, p_\varepsilon, q_\varepsilon)(1-\varepsilon)\, d\varepsilon$$

Ist daher $\int_0^1 (1-\varepsilon) F_1(x_1, y_1, p_\varepsilon, q_\varepsilon)\, d\varepsilon$ von Null verschieden, wovon man sich in jedem besonderen Falle überzeugen muss, so folgt:

$$q_1 \bar{p}_1 - p_1 \bar{q}_1 = 0$$

und hieraus

$$p_1 = \pm \bar{p}_1, \quad q_1 = \pm \bar{q}_1$$

Wollte man das untere Vorzeichen nehmen, also $p_1 = -\bar{p}_1$, $q_1 = -\bar{q}_1$, setzen, so könnte es geschehen, dass F_1 innerhalb der Integrationsgrenzen unendlich gross würde, nämlich deshalb, weil dan p_ε und q_ε zugleich für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ verschwinden. Mithin wird im Allgemeinen wenigstens

$$p_1 = \bar{p}_1 \quad , q_1 = \bar{q}_1$$

sein; das Gegenteil müsste einer besonderen Untersuchung unterworfen werden.

Es ergiebt sich daher der Satz:

Trifft die der Differentialgleichung genügende Curve an irgend einer Stelle mit der Begrenzung zusammen und läuft sie darauf ein Stück mit derselben weiter, so darf ihre Richtung in dem Treffpunkte keine unstetige Aenderung erleiden.

Auf ganz analoge Weise leitet man dasselbe Resultat für einen Punkt ab, wo die Curve die Grenze wieder verlässt, nachdem sie eine Strecke lang mit ihr zusammengefallen war.

Wir haben hierbei stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dass die Grenze im Punkte 1 nicht selbst eine plötzliche Richtungsänderung erleidet. Ist dieses aber der Fall und sind $\bar{p}_2\, \bar{q}_2$ die

Richtungscosinus der Tangente der Curve, mit denen man in 1 ankommt, $\bar{p}, \bar{q}$. die, mit denen man den Punkt 1 wieder verlässt, so erhalten wir für ΔJ^0 die Ausdrücke:

im ersten Falle: $\Delta J^0 = \mathcal{E}(x_1 y_1, p_1 q_1, \bar{p}_2 \bar{q}_2)\sigma + (\sigma)_2$

" zweiten " : $\Delta J^0 = -\mathcal{E}(x_1 y_1, p_1 q_1, \bar{p}_1 \bar{q}_1)\sigma + (\sigma)_2$

Im folgenden Capitel wird nun nachgewiesen werden, dass, falls ein Maximum oder Minimum stattfinden soll, die Function $\mathcal{E}(x\,y, p\,q, \bar{p}\,\bar{q})$ für jeden Punkt der Curve und für beliebige Richtungen $\bar{p}\,\bar{q}$ beständig einerlei Zeichens und zwar im ersten Falle nicht positiv, im zweiten nicht negativ sein muss. Daraus folgt sowohl für den Fall des Maximums als für den des Minimums, dass wiederum:

$$\mathcal{E}(x_1 y_1, p_1 q_1, \bar{p}_1 \bar{q}_1) = 0$$

sein muss, während $\mathcal{E}(x_1 y_1, p_1 q_1, \bar{p}_2 \bar{q}_2)$ beliebig bleibt. Denn handelt sich's z. B. um den Fall des Minimums, so dürfte nach dem vorausgenommenen Satze die Function $\mathcal{E}(x_1 y_1, p_1 q_1 \bar{p}_1 \bar{q}_1)$ nicht negativ sein; sie darf aber auch nicht positiv sein, weil dann zufolge der Gleichung

$$\Delta J^0 = -\mathcal{E}(x_1 y_1, p_1 q_1, \bar{p}_1 \bar{q}_1)\sigma + (\sigma)_2$$

J^0 für gewisse Variationen eine negative Ände-

rung erfahren würde. Mithin muss $E(x, y, p, q, \bar{p}, q_1) = 0$ sein. Analoges gilt für den Punkt 2, in welchem die Curve die Grenze wieder verlässt. Wir erhalten daher als schliessliches Resultat den folgenden Satz:

Wenn die Curve, für welche ein Maximum oder Minimum eintreten soll, die Begrenzungscurve trifft und eine Strecke lang mit dieser zusammenläuft, so muss in den beiden Punkten, wo erstere die letztere erreicht und wieder verlässt, eine Berührung zwischen beiden stattfinden und zwar so, dass ihre Tangenten gleichgerichtet sind. Aendert sich in diesen beiden Punkten die Richtung der Grenzcurve etwa unstetig, so darf die Endrichtung des vorhergehenden Teiles und des auf die gemeinsame Strecke folgenden Teiles der Grenzcurve ganz beliebig sein.

Es ist nun ferner der Fall zu betrachten, wo die Curve nur in einem Punkte 1 mit der Grenzcurve zusammenstösst und dieselbe sogleich wieder verlässt. Es seien 01 und 12 die beiden Teile der Curve, die der Differentialgleichung genügen

und in 1 mit der Grenzcurve zusammenstösst; die Punkte 0 und 2 seien so nahe bei 1 angenommen, dass sich innerhalb der Strecken 01 und 12 die Richtung der Curve nicht mehr sprungweise ändert. Wir variiren dann die Curve 012; indem wir vom Punkte 1 zu einem Nachbarpunkte 3 der Grenze übergehen und den Punkt 3 mit den Punkten 0 und 2 durch Curven verbinden, die nicht der Differentialgleichung zu genügen brauchen aber der Bedingung unterworfen sind, dass das Integral J' durch diese Variation seinen Wert nicht ändert. Ist dann $p\,q$ die Richtung der Tangente von 01 im Punkte 1, $p_1 q_1$ die Richtung von 12 in demselben Punkte und werden die den einzelnen Punkten zugehörigen Coordinaten $x\,y$ durch Indices von einander unterschieden, so ergiebt sich ähnlich wie pag. Cap 12:

$$J^0_{03} - J^0_{01} = F^{(1)}(x_1, y_1, p, q)(x_3 - x_1) + F^{(2)}(x_1, y_1, p\,q)(y_3 - y_1) + \left(\xi\,\eta\,\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}\right)_2$$

$$J^0_{32} - J^0_{12} = -F^{(1)}(x_1, y_1, p_1, q_1)(x_3 - x_1) - F^{(2)}(x_1, y_1, p_1, q_1)(y_3 - y_1) + \left(\xi\,\eta\,\frac{d\xi}{dt}\,\frac{d\eta}{dt}\right)_2$$

Mithin:

$$J^0_{032} - J^0_{012} = \left(F^{(1)}(x_1, y_1, p\,q) - F^{(1)}(x_1, y_1, p_1, q_1)\right)(x_3 - x_1) + \left(F^{(2)}(x_1 y_1, p\,q) - F^{(2)}(x_1, y_1, p_1, q_1)\right)(y_3 - y_1)$$
$$+ \left(\xi\,\eta\,\frac{d\xi}{dt}\,\frac{d\eta}{dt}\right)_2$$

Nehmen wir nun an, dass $p\,q_1 - p_1\,q$ von 0 verschie-

den sei, dass also die Tangenten der beiden Curventeile 01 und 12 im Punkte 1 nicht zusammenfallen, so können wir setzen:

$$x_3 - x_1 = p\,\delta + p_1\,\delta_1$$

$$y_3 - y_1 = q\,\delta + q_1\,\delta_1$$

Die geometrische Bedeutung von δ und δ_1 erkennt man leicht, wenn man beachtet, dass diesen Gleichungen zufolge die Strecke 13 die geometrische Summe der beiden Strecken $p\delta, q\delta$ und $p_1\delta_1, q_1\delta_1$ ist, dass mithin δ und δ_1 die Coordinaten der Strecke 13 sind, bezogen auf ein schiefwinkliges Coordinatensystem, dessen positive Achsen die Richtungen pq und $p_1 q_1$ haben, also durch die Tangenten an die beiden Curventeile dargestellt werden. Setzt man diese Ausdrücke für $x_3 - x_1$, $y_2 - y_1$ oben ein, so wird:

$$J^0_{032} - J^0_{012} = \mathcal{E}(x_1 y_1, p_1 q_1, p q)\,\delta - \mathcal{E}(x_1 y_1, p q, p_1 q_1)\,\delta_1 + \left(\xi \eta \frac{d\xi}{dt} \frac{d\eta}{dt}\right)_2$$

$$= \mathcal{E}\,\delta - \mathcal{E}_1\,\delta_1 + \left(\xi \eta \frac{d\xi}{dt} \frac{d\eta}{dt}\right)_2$$

Die gerade Linie, deren Gleichung ist:

$$\mathcal{E}\,\delta - \mathcal{E}_1\,\delta_1 = 0$$

teilt die Ebene in zwei Teile. Für die Punkte des einen Teiles ist:

$$\mathcal{E}\,\delta - \mathcal{E}_1\,\delta_1 > 0,$$

für die des andern ist

$$\mathcal{E}\,\delta - \mathcal{E}_1\,\delta_1 < 0$$

Der Punkt 1, welchen die Curve mit der Grenze

-gemein hat, kann nun der Annahme nach nur in der Grenze verschoben werden. Wäre die Richtung der Tangente der Grenze im Punkte 1 von der Richtung jener Geraden verschieden, welche Gerade wir die „Scheidelinie" nennen wollen, so würde $\varepsilon\delta - \varepsilon_1\delta_1$ durch die beiden einander entgegengesetzten Verschiebungen des Punktes 1 einmal positiv und einmal negativ werden; und da $\varepsilon\delta - \varepsilon_1\delta_1$ bis auf einen constanten Factor die Entfernung von der Scheidelinie darstellt, also mit $\xi\eta$ von der ersten Ordnung unendlich klein wird, so würden wir $\xi\eta$ so klein wählen können, dass $J^0_{032} - J^0_{012}$ dasselbe Vorzeichen wie $\varepsilon\delta - \varepsilon_1\delta_1$ besässe, also bald positiv bald negativ würde. Mithin muss die Richtung der Tangente der Grenzcurve im Punkte 1 mit der Richtung der Scheidelinie zusammenfallen.

Die Sinusse der Winkel, welche die Scheidelinie mit der δ- und δ_1-Achse d. h. mit den Tangenten an die beiden Curventeile im Punkte 1 bildet, verhalten sich nun wie ε_1 zu ε, wobei die Winkel nach entgegengesetzten Richtungen gemessen werden. Mithin erhalten wir den allgemeinen Satz:

Wenn die der Differentialgleichung genügende Curve die Grenze nur in einem Punkte trifft und dieselbe sogleich wieder verlässt, so bilden die Tangenten der beiden Curventeile im Treffpunkte mit der Richtung der Grenzcurve in demselben Punkte Winkel deren Sinus sich wie ε_1 zu ε verhalten.

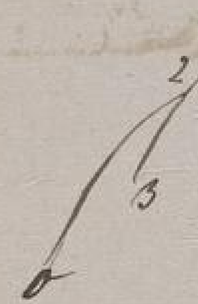
Von diesem Theoreme bildet der auf das isoperimetrische Problem sich beziehende zweite Steiner'sche Satz einen ganz speciellen Fall. Beim isoperimetrischen Problem ergiebt sich nämlich $\varepsilon_1 = \varepsilon$ d. h. die beiden Winkel, welche die Tangenten der beiden nach demselben Punkte der Grenze hin gehenden Kreisbögen im Punkte ihres Zusammentreffens mit der Richtung der Grenzcurve bilden, sind einander gleich.

Wir haben gezeigt, dass die Curve überall da, wo sie frei variirt werden kann, einer und derselben Differentialgleichung genügt, d. h. dass für die ganze Curve die Constante λ dieselbe ist. Dies führt aber zu einem gewissen Paradoxon. Kehrt man das isoperimetrische Problem um, sucht man also unter allen

Linien, welche einen gegebenen Flächenraum umschliessen, diejenige, für welche die Bogenlänge die kürzeste ist, so gelangt man zu derselben Differentialgleichung, wie bei der ursprünglichen Aufgabe. Hier ist allerdings $F = F^1 + F^0$ an die Stelle von $F = F^0 + F^1$ getreten, doch ändert sich dadurch die Natur der Differentialgleichung nicht, da dies nur eine Veränderung der Constanten bedeutet. Doch ist es auch an sich klar, dass man zu derselben Lösung gelangen muss, denn wäre es möglich, bei unverändertem Flächeninhalt die Curvenlänge zu verkleinern, so müsste es doch offenbar möglich sein, mit der ursprünglichen Länge einen grösseren Flächenraum zu umschliessen; mithin genügt eine Curve, welche aus der Differentialgleichung des ersten Problems entspringt, auch der des umgekehrten Problems. Man erhält daher auch für dieses zweite Problem den Satz, dass die Curve überall da, wo sie frei variirt werden kann, aus Kreisbögen von gleichem Radius besteht. – Seien nun in der Ebene drei Punkte 1 2 3 gegeben, und verlangt man, dass durch dieselben der Reihe nach eine

Linie gehen soll, welche einen gegebenen Flächenraum umschliesst und einen möglichst kurzen Umfang hat, so wird, falls die vorgeschriebene Fläche etwa gleich der durch die drei Punkte bestimmten Kreisfläche ist, welche W genannt werde, die Aufgabe durch den durch die drei Punkte (welche natürlich nicht in gerader Linie liegen sollen) gehenden Kreis gelöst werden. Ist die Fläche grösser als W oder kleiner als W, so kann man, um die Fläche gleich zu machen, die Kreisbögen nach Aussen hinaus oder nach Innen hineinziehen. Ist aber die vorgeschriebene Fläche sehr klein, so kann man nicht mehr Kreisbögen 12, 23, 31 so ziehen, dass dieselben die gegebene Fläche umschliessen, wofern dieselben sich nicht schneiden und die im entgegengesetzten Sinne umlaufenen Stücke mit entgegengesetztem Zeichen gerechnet werden sollen. Nichtsdestoweniger scheint doch das Problem lösbar zu sein. Dies Paradoxon lässt sich dadurch, dass die Curve, obwohl durch keine weiteren Bedingungen beschränkt, doch nicht überall frei variirbar zu sein braucht, also nicht notwendig überall aus Kreisbögen besteht. Nimmt man nämlich an, dass die Curve sich nicht

selbst schneiden soll, so kann sie sich selbst Hindernisse bereiten, die ihre freie Variation beeinträchtigen.



Bedeckt z. B. die Curve 0123 sich selbst theilweise, so dass die Strecke 13 bis zum Punkt 2 mit 01 zusammenläuft, so wird es unter allen möglichen Variationen der Curve doch sicher auch die geben, wo man 01 unverändert lässt, und nur 13 variirt; da aber die Curve sich nicht selbst schneiden darf, so können die Variationen des Stückes 12 nur nach der Seite von 01 hin stattfinden, auf welcher der Punkt 3 liegt und es wird somit die Freiheit der Variation der Curve wesentlich beschränkt. An und für sich ist aber jene Forderung, dass die Curve sich nicht schneiden soll, durchaus nicht erforderlich, da die vorkommenden Integrale auch sonst einen Sinn haben.

Giebt es in der Curve zusammenfallende Strecken, so kann man doch auch solche Variationen eintreten lassen, dass zusammenfallende Punkte auch nach der Variation noch zusammenfallen, ohne dass das zweite Integral dadurch seinen Wert ändert. Wir untersuchen, was für eine

Differentialgleichung wir dadurch für diese Strecke erhalten.

Die nachfolgende Betrachtung wird auch auf den Fall anwendbar sein, wo kein zweites Integral vorhanden ist, wenn wir der Constanten λ den Wert o geben.

Wir nehmen nun Variationen von der Form an:

$$\xi = \kappa u + \kappa_1 u_1 \;,\; \eta = \kappa v + \kappa_1 v_1$$

Dann fanden wir früher, dass die erste Variation von I^o identisch wurde mit:

$$\delta \int (F^o - \lambda F') dt$$

vorausgesetzt, dass κ_1 als Potenzreihe von κ so dargestellt werden konnte, dass die vollständige Variation des zweiten Integrals verschwand. Dieses δI^o konnte auf die Form gebracht werden:

$$\delta I^o = \kappa \int G(y'u - x'v)\, dt$$

Hierin waren in dem früher betrachteten Falle u und v vollkommen willkürlich mit Ausnahme von einzelnen Punkten und Strecken, wo sie verschwanden. Überall da, wo sie willkürlich waren, musste $G = o$ sein. In unserem Falle kommen nun noch diejenigen Strecken hinzu, welche die Curve mehrfach durchläuft, ohne sich schneiden zu dürfen. Die Differentialgleichungen

deren diese Strecken genügen, werden wir dadurch erhalten, dass wir die oben erwähnten Variationen anwenden.

Es ist nun, da dt einen positiven Zuwachs von t bezeichnet:

$$F(xy, x'y')dt = F(xy, x'dt, y'dt) = F(xy, dx, dy)$$

Es sei 12 eine Strecke, welche mehrmals durchlaufen wird. Das Integral erstreckt über das erstmalige Durchlaufen derselben vom Punkte 1 bis zum Punkte 2 kann dann in der Form geschrieben werden:

$$\int_{x_1 y_1}^{x_2 y_2} F(xy, dx, dy) = \int_1^2 F(xy, dx, dy)$$

Der Teil des Integrals, erstreckt über dasselbe Stück in entgegengesetzter Richtung, wird:

$$\int_2^1 F(xy, dx, dy)$$

Wird die Strecke μ mal in dem ersten und ν mal in dem zweiten Sinne durchlaufen, und werden alle Variationen ausserhalb dieser Strecke gleich Null gesetzt, während jeder Punkt dieser Strecke nur eine Variation erhält, so ist die Variation des ganzen Integrals gleich der Variation der Integralsumme:

$$\mu \int_1^2 F(xy, dx\, dy) + \nu \int_2^1 (F(xy\, dx\, dy)$$

Nun ist aber:

$$\int_2^1 F(x\,y\,dx\,dy) = \int_1^2 F(x\,y, -dx, -dy)$$

folglich wird aus

$$\mu \int_1^2 F(x\,y, dx\,dy) + \nu \int_1^2 F(x\,y, -dx, -dy)$$

oder wenn wir

$$\mu F(x\,y, dx\,dy) + \nu F(x\,y, -dx, -dy) = \bar{F}(x\,y\,dx\,dy)$$

setzen:

$$\int_1^2 \bar{F}(x\,y\,dx\,dy)$$

Für dieses Integral wird die Strecke 12 nur einmal durchlaufen, die Variationen derselben sind also völlig frei. Die Strecke 12 muss daher der Differentialgleichung genügen, welche aus der Function $\bar{F}(x\,y\,x'\,y')$ auf dieselbe Weise wie früher entspringt.

So ist z. B. bei der Aufgabe, die Curve zu bestimmen, welche bei gegebenem Flächeninhalt den kürzesten Umfang hat

$$F(x\,y\,dx\,dy) = \sqrt{dx^2 + dy^2} - \lambda\,y\,dx$$

Daher für $\mu = \nu$

$$\bar{F}(x\,y\,dx\,dy) = \mu\left(\sqrt{dx^2 + dy^2} - \lambda\,y\,dx + \sqrt{dx^2 + dy^2} + \lambda\,y\,dx\right) = 2\mu\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

und es würde somit die Differentialgleichung auf die gerade Linie führen.

Ist aber $\mu \gtrless \nu$, so kommt:

$$\bar{F} = (\mu + \nu)\sqrt{dx^2 + dy^2} - \lambda(\mu - \nu)\,y\,dx.$$

Die Differentialgleichung, auf welche dies führt, würde von der Form $G^1 - \lambda_1 G^0 = 0$ sein, worin $\lambda_1 = \lambda \frac{\mu - \nu}{\mu + \nu}$ ist, sie würde somit auf einen Kreisbogen führen, der aber nicht denselben Radius besitzt wie die frei variirbaren Teile der Curve. Dies kann aber thatsächlich nicht eintreten, falls nicht noch ganz besondere Bestimmungen gelten; denn lässt man einen solchen Kreisbogen zweimal in verschiedenen Richtungen durchlaufen werden, so ist der hierdurch zur Fläche gelieferte Beitrag gleich 0 und der Umfang könnte dadurch verkleinert werden, dass man statt des Kreisbogens die gerade Verbindungslinie seiner Endpunkte nimmt. Würde ferner derselbe Kreisbogen noch mehrmals durchlaufen, so kann man, falls nicht besondere Bestimmungen dies verbieten, die beiden ersten, resp. die n-2 ersten Male des Durchlaufens fortlassen, wodurch die Bogenlänge ohne Aenderung der Fläche verkleinert würde.

Dagegen ist der Fall $\mu = \nu = 1$ also der Fall, wo eine gerade Linie auftritt, mitunter durchaus notwendig.

Jedenfalls erfährt man durch diese Betrachtungen, aus was für Stücken

die gesuchte Curve überhaupt zusammengesetzt sein kann, und es kommt daher nur darauf an, zu untersuchen, welche von diesen Stücken benutzt werden können und wie dieselben zu gruppiren sind. Man hat also alle möglichen Combinationen aufzusuchen, und diese auf ihre Zulässigkeit zu prüfen. Man betrachte also irgend eine Configuration und variire sie; da hierbei die Linie selbst ihrer Natur nach bestimmt und nur die in ihnen auftretenden Constanten z. B. die Endpunkte der einzelnen Stücke unbestimmt sind, so sind nur diese zu variiren. Da uns unsere bisherigen Sätze in den Stand setzen, dies vollständig auszuführen, so werden wir auf diese Weise ermitteln können, ob eine solche Configuration der einzelnen Stücke möglich ist oder nicht.

Da nur die einzelnen Stücke ihren Differentialgleichungen genügen, so werden die ersten Variationen der zugehörigen Integrale immer nur abhängig sein von den Variationen der Endpunkte. Indem wir dies auf alle Stücke anwenden, erhalten wir eine li-

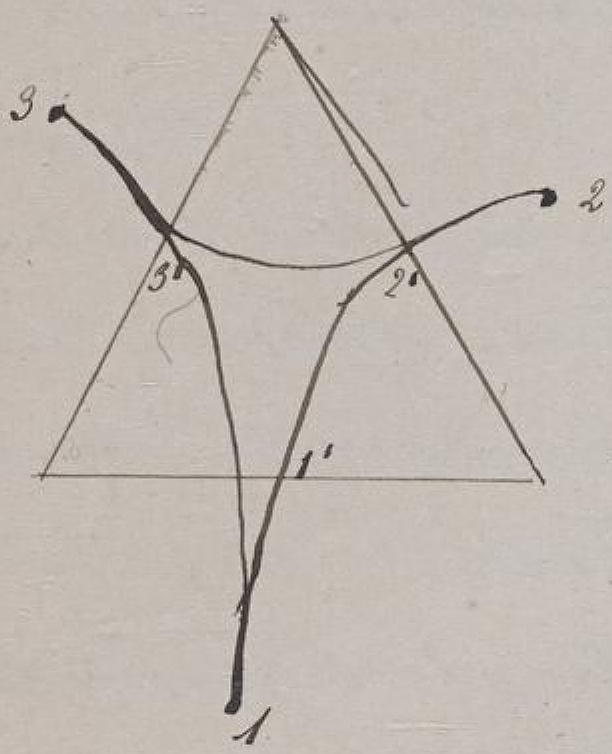
neare Function aller Variationen der Coordinaten der einzelnen Endpunkte. Dabei können diese Endpunkte noch gegebenen Bedingungen unterworfen sein, sie können z.B. gezwungen sein, auf gegebenen Curven zu liegen u. s. w. Mit Anwendung der früher entwickelten Sätze erhält man dann gewisse Gleichungen zur Bestimmung der möglichen Lage der Endpunkte der einzelnen Stücke und erfährt so, ob eine bestimmte Configuration statthaft ist oder nicht. Jedenfalls verschwindet für die so bestimmte Gruppirung die erste Variation des Integrals, womit aber noch nicht gesagt ist, dass dieselbe nun auch wirklich das Maximum oder Minimum darbietet. Dies zu untersuchen ist aber eine Aufgabe der Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima. Denn sobald die einzelnen Stücke gefunden sind, kann man auch die Integrale für sie bestimmen, deren Wert jetzt nur noch abhängig ist von den eingeführten Constanten λ und den Coordinaten der Endpunkte. Man erhält so eine gewöhnliche Function einer endlichen Anzahl von Veränderlichen und es muss untersucht werden, ob dieselbe den Bedingungen des Maximums

oder Minimums auch wirklich genügt. Dies geschieht aber auf die pag. angegebene Weise

Auf diese Weise übersieht man wenigstens, wie es möglich ist zu entscheiden, ob eine gewisse Gestaltung der Curve die Aufgabe löst oder nicht.

Soll z. B. eine sich nicht schneidende Curve gefunden werden, welche bei gegebenem Flächeninhalt eine möglichst kleine Länge hat und durch drei gegebene Punkte 1 2 3 der Reihe nach hindurchgehen soll, so muss dieselbe aus drei zwischen 1 und 2, 2 und 3, 3 und 1 gelegenen Curventeilen bestehen, welche im Allgemeinen, d. h. wenn die gegebene Fläche gross genug ist, Kreisbögen von gleichem Radius sein werden. Dieser Radius kann aus dem gegebenen Werte der Fläche berechnet werden. J^0 wird eine Function der noch vorhandenen Constanten und es lässt sich zeigen, dass J^0 wirklich ein Minimum ist, wenn die Constanten richtig bestimmt sind. Ist aber die Aufgabe in dieser Weise nicht lösbar, so müssen jene Curvenstücke teilweise mit einander zusammenfallen, und zwar ist die Strecke, in welcher dies geschieht, eine gerade

Linie. Man sieht nun leicht, dass die Curve keine Ausläufer mit einem freien Punkte haben kann; denn wäre dies der Fall, so könnte man den Punkt so variiren, dass die Fläche dieselbe



bleibt, während die Länge kleiner wird. Besitzt also die Curve solche Ausläufer, so müssen dieselben durch die drei gegebenen Punkte gehen und gerade Linien sein. Man findet so, dass die Curve in der That aus drei mit gleichem Radius beschriebenen Kreisbögen besteht, die sich gegenseitig berühren und in gerade Linien auslaufen, welche durch die gegebenen Punkte gehen, also etwa wie in beistehender Figur. Hierbei ist ersichtlich, dass die Lösung der gegebenen Lage der Punkte 123 zu einander unabhängig sein muss, denn wir könnten die Punkte 123 auf den Geraden hin- und herrücken, ohne dass deshalb die Curve ihre Eigenschaft verlieren dürfte, ein Minimum der Länge darzubieten. Es kommt also nur darauf an, wie wir diejenigen Punkte wählen müssen, wo die gera-

den Linien mit den Kreisbögen zusammenstossen. Bezeichnen wir dieselben entsprechend den drei Punkten mit 1'2'3'. Wird das Stück 2'1'1 als feste Grenze betrachtet und der Endpunkt von 3'1' auf derselben variirt, so folgt nach dem Satze pag. Cap 16 dass 3'1' die Grenze tangiren muss, so dass die Curve 3'1'1 ihre Richtung nirgends unstetig ändert. Mithin müssen je zwei Kreisbögen sich berühren, wenn sie zusammenstossen. Da die Radien der Kreisbögen einander gleich sind, so folgt hieraus, dass die drei Mittelpunkte der Kreisbögen ein gleichseitiges Dreieck bilden und somit die drei Kreisbögen gleich lang sind. Je zwei gerade Linien bilden daher einen Winkel von 120 Grad mit einander, wodurch die Lösung des Problems eindeutig gegeben ist.

Capitel 17.

Die hinreichenden Bedingungen.

Aehnlich wie in dem Falle eines Integrals bietet sich auch hier ein Weg dar, auf welchem wir, ganz ohne die zweite Variation zu betrachten, das allgemeine Problem zu Ende zu führen, im Stande sind.

Es sei also durch die erste Variation der Integrale die Differentialgleichung gefunden, welcher die gesuchte Curve notwendig genügen muss. Das zu betrachtende Stück der Curve werde so eingeschränkt, dass für jeden Punkt desselben F_0 und F_1 reguläre Functionen von $x\, y\, x'\, y'$ sind und dass für keinen Punkt F_1 gleich Null oder unendlich wird. Der Fall, dass das Curvenstück dergleichen Punkte enthielte, wird der besonderen Untersuchung in jedem speciellen Falle überlassen. Unter diesen Voraussetzungen führen wir jetzt die Untersuchung weiter.

Die Endpunkte des vorliegenden Curven-

teiles seien 0 und 1. Durch einen beliebigen Punkt 2 desselben ziehen wir eine beliebige Curve und nehmen auf dieser einen Punkt 3 nahe bei 2 an, bis zu dem wir von 0 aus eine zweite der Differentialgleichung genügende Curve ziehen.

Dann ist doch die Linie 0321 eine mögliche Variation von 01. Die Aenderung welche durch diese Variation das Integral

$$I^0 = \int_{t_0}^{t_1} F^0(x\,y,\,x'\,y')\,dt$$

erleidet, nimmt wie wir pag. sahen, die Gestalt an:

$$\Delta I^0 = \mathcal{E}^0(x_2 y_2,\, p_2\, q_2,\, \bar{p}_2\, \bar{q}_2)\,\sigma + \int_{t_1} G^0 w\, dt + \left(\sigma\, \xi\, \eta\, \frac{d\xi}{dt}\, \frac{d\eta}{dt}\right)_2$$

wo σ die Länge von 23 positiv genommen, $p_2\, q_2$ die Richtungscosinus von 02 in 2, $\bar{p}_2 \bar{q}_2$ diejenigen von 32 im Punkte 2 und $x_2\, y_2$ die Coordinaten von 2 bedeuten.

Liegen zwei Integrale vor und ist die Variation von der Art, dass eins der beiden Integrale dadurch ungeändert bleibt, so haben wir, wenn I^1, $\mathcal{E}^1$, G^1 die entsprechenden Grössen für das zweite Integral sind:

$$\Delta I^0 = \mathcal{E}^0\sigma + \int_{t_0}^{t_1} G^0 w\, dt + \left(\sigma\, \xi\, \eta\, \frac{d\xi}{dt}\, \frac{d\eta}{dt}\right)_2$$

$$0 = \mathcal{E}^1\sigma + \int_{t_0}^{t_1} G^1 w\, dt + \left(\sigma\, \xi\, \eta\, \frac{d\xi}{dt}\, \frac{d\eta}{dt}\right)_2$$

Mithin, wenn wir früher $\mathcal{E}^0 - \lambda\,\mathcal{E}^1$ mit $\mathcal{E}$ bezeich-

net wird:

$$\Delta \mathfrak{I} \stackrel{0}{=} \mathcal{E}\sigma + \int_{t_0}^{t_1} (G^0 - \lambda G')\, w\, dt + \left(\sigma\, \xi\, \eta\, \frac{d\xi}{dt}\, \frac{d\eta}{dt}\right)_2$$

und wenn die Curve der Differentialgleichung $G^0 - \lambda G' = 0$ genügt:

$$\Delta \mathfrak{I} \stackrel{0}{=} \mathcal{E}(x_2\, y_2, p_2\, q_2, \bar{p}_2\, \bar{q}_2)\, \sigma + \left(\sigma\, \xi\, \eta\, \frac{d\xi}{dt}\, \frac{d\eta}{dt}\right)_2$$

Aus dieser Gleichung folgt genau so wie pag. dass die Function $\mathcal{E}(x\,y, p\,q, \bar{p}\,\bar{q})$ längs des ganzen Curventeils für keine zwei Wertepaare $\bar{p}\,\bar{q}$ Werte entgegengesetzten Zeichens haben darf, wenn anders $\Delta \mathfrak{I}^0$ beständig einerlei Zeichen haben soll.

Ganz analog den Umformungen auf pag. findet man:

$$\mathcal{E}(x\,y, p\,q, \bar{p}\,\bar{q}) = (q\bar{p} - p\bar{q})^2 \int_0^1 \left(F_1^0(x\,y, p_\varepsilon\, q_\varepsilon) - \lambda F_1'(x\,y, p_\varepsilon\, q_\varepsilon)\right)(1-\varepsilon)\, d\varepsilon$$

wo

$$p_\varepsilon = (1-\varepsilon)\, p + \varepsilon \bar{p}$$
$$q_\varepsilon = (1-\varepsilon)\, q + \varepsilon \bar{q}$$

ist. Die erhaltene Bedingung schliesst also ein, dass auch $F_1^0(x\,y, p\,q) - \lambda F_1'(x\,y, p\,q)$ längs des betrachteten Curventeiles für keine Tangente $p\,q$ der Curve Werte verschiedenen Zeichens annehmen darf. Nicht aber umgekehrt; vielmehr ist die Bedingung, dass $\mathcal{E}$ sein Zeichen nicht wechseln darf, weitergehend, insofern diese Forderung für jede beliebige Richtung $\bar{p}\,\bar{q}$ erfüllt sein muss.

Denken wir uns in jedem Punkte der Curve 01 eine auf ihrer Ebene senkrechte Linie errichtet, deren Länge gleich dem Werte des zweiten Integrals erstreckt über die Curve von 0 aus bis zu diesem Punkte hin ist, so entspricht der Curve 01 eine gewisse Raumcurve 01', indem wir die den Punkten in der Ebene entsprechenden Punkte des Raumes durch die bestrichenen Zahlen bezeichnen; ebenso wird einer jeden andern von 0 aus gezogenen ebenen Curve durch dieselbe Festsetzung eine gewisse Raumcurve entsprechen, von welcher wir sagen wollen, dass sie der Differentialgleichung genüge, wenn ihre Projection der Differentialgleichung $G^0 + \lambda G' = 0$ genügt, wobei jedoch λ nicht für alle Curven denselben Wert zu besitzen braucht.

Gesetzt nun, wir könnten die Raumcurve 01' in einen Raumteil von folgender Beschaffenheit einhüllen: Der Punkt 0 soll auf der Grenze, der Punkt 1' dagegen innerhalb desselben liegen. Ferner soll es möglich sein, nach jedem Punkte dieses Raumteiles von 0 aus wenigstens eine der Differentialgleichung genügende Curve zu ziehen. Wenn nach irgend einem Punkte desselben eine

solcher Curve gezogen ist, so soll es möglich sein, nach einem benachbarten Punkte ebenfalls eine der Differentialgleichung genügende Curve zu ziehen, welche sich überall beliebig nahe an die erste Curve anschliesst und deren Δ beliebig wenig von dem Δ der ersten Curve abweicht, wofern nur ihr Endpunkt dem Endpunkt der ersten hinreichend nahe liegt. Wenn also der Endpunkt in dem Raumteil eine stetige Curve beschreibt, so können wir eine Reihe von Curven nach seinen successiven Lagen ziehen, die der Differentialgleichung genügen, so dass die einer Curve vorangehenden und nachfolgenden Curven entweder mit ihr zusammenfallen, oder Variationen von ihr sind, je nachdem die von jenem Endpunkt beschriebene Curve die Fortsetzung einer von 0 aus gezogenen, der Differentialgleichung genügenden Curve ist oder nicht.

Wir werden im folgenden Capitel nachweisen, dass ein solcher Raumteil, abgesehen von einzelnen besonders zu untersuchenden Fällen, existiren muss, wenn die Curve 01 ein Maximum oder Minimum darbieten soll. Hier setzen

wir vorläufig, um die wesentlichsten Punkte möglichst klar hervorheben zu können, die Existenz eines solchen voraus.

Nun fanden wir vorhin, dass die Function $\mathcal{E}(xy, pq, \bar{p}\bar{q})$ längs der ganzen Curve nicht Werte entgegengesetzten Zeichens haben darf und zwar für beliebige Werte von $\bar{p}\bar{q}$. Daraus schliessen wir, dass im Allgemeinen $\mathcal{E}(xy, pq, \bar{p}\bar{q})$ auch für andere der Differentialgleichung genügende Curven, deren Richtungs- und Lagenabweichungen von der ursprünglichen Curve unterhalb einer gewissen Grenze liegen und deren λ hinreichend wenig von dem λ der ersten Curve verschieden ist, keine Werte entgegengesetzten Zeichens haben wird. Sicher wird dies dann stattfinden, wenn das Integral:

$$\int_0^1 \left\{ F_1^0(xy, p_\varepsilon q_\varepsilon) - \lambda F_1^{(}xy, p_\varepsilon q_\varepsilon) \right\} (1-\varepsilon)\, d\varepsilon,$$

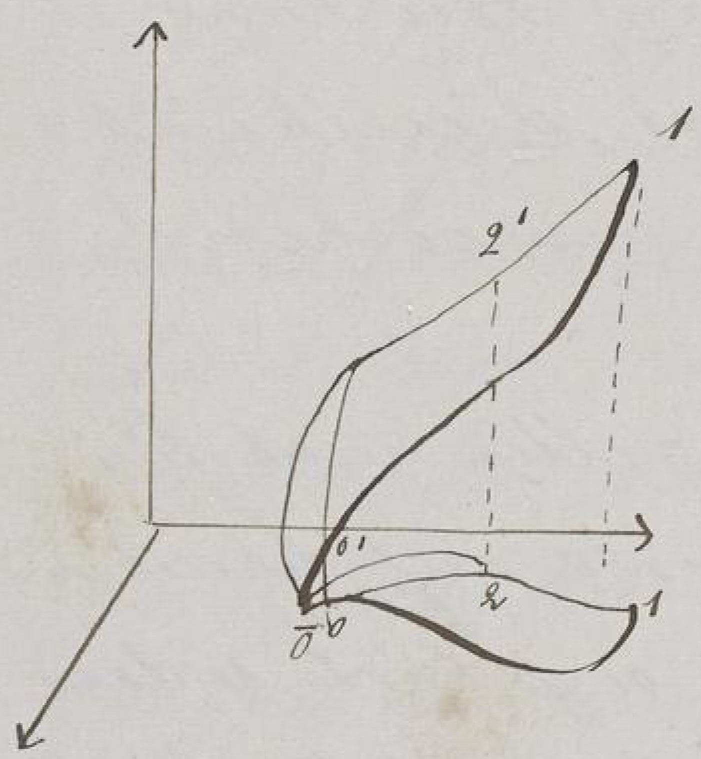
welches ja ebenfalls nicht Werte entgegengesetzten Zeichens auf der ersten Curve annehmen darf, längs derselben überall auch von Null verschieden ist. Sollte es irgendwo Null werden, so überweisen wir diesen Fall einer besonderen Untersuchung. Mit Ausschluss desselben haben wir also als weitere notwendige Bedingung

erkannt, dass sich o_1 so in ein Flächenstück einhüllen lasse, auf dessen Grenze der Punkt o liegt, dass $\mathfrak{E}(x\,y, pq, \bar{p}\bar{q})$ auf allen von o aus innerhalb des Flächenstücks gezogenen Curven nicht Werte verschiedenen Zeichens annimmt, vorausgesetzt, dass dieselben Differentialgleichungen mit hinreichend wenig verändertem λ genügen.

Dieselben Betrachtungen gelten auch für einen Punkt $\bar{o}$, welcher etwas vor o auf derselben Curve liegt, zu welcher der Teil o_1 gehört, so dass alsdann o_1 ganz innerhalb des Flächenstücks liegt. Diesem Flächenstück entspricht nun ein Raumteil, welcher beliebig klein gemacht werden kann dadurch, dass das Flächenstück und die zugelassene Aenderung von λ hinreichend klein angenommen werden. Denken wir uns in dem zuerst definirten Raumteil ebenfalls $\bar{o}$ an die Stelle von o gesetzt, so können wir den zweiten so klein annehmen, dass er ganz innerhalb des ersten liegt.

Es möge nun o', welches jetzt der o entsprechende Punkt im Raume ist, mit $1'$ durch eine reguläre Curve verbunden werden, welche innerhalb des zweiten Raumteiles liegt. Diese Curve soll

im Übrigen ganz beliebig sein und nur die Eigenschaft besitzen, dass wenn 2 die Projection irgend eines Punktes 2' derselben auf die xy-Ebene ist, die Summe $S'_{\bar{0}0} + \bar{S}'_{02}$ stets gleich der Länge des den Punkt 2' projicirenden Lotes ist, wobei wir wie früher mit S ein über eine aus der Differentialgleichung bestimmte Curve erstrecktes Integral, mit $\bar{S}$ ein solches über die beliebige Curve bezeichnen, und durch die beigefügten Indices die Grenzen und die Richtung der Integration andeuten.



Nach jedem Punkte 2' der Raumcurve können von $\bar{0}$ aus der Differentialgleichung genügende Curven gezogen werden, die ebenfalls mit Ausnahme ihres Anfangspunktes ganz innerhalb des Raumteiles liegen, und zwar sollen sie, was nach den Annahmen immer möglich ist, die Eigenschaft haben, dass von $\bar{0}1'$ aus die nächstfolgenden immer Variationen der vorhergehenden sind.

Wir denken uns die Punkte der Projection der beliebigen Curve als Functionen der Bogenlänge von 1 aus gerechnet dargestellt, und betrachten nun die Summe:

$$\bar{J}_{02} + \bar{J}_{21}$$

Aus der uns festgesetzten räumlichen Beziehung folgt, dass wo auch immer der Punkt 2 auf der Curve 021 liegen möge, doch stets die Summe

$$\mathcal{J}'_{02} + \bar{J}_{21} = J'_{001}$$

ist. Lassen wir nun die Länge der Strecke 12 um σ zunehmen, so wird die Änderung, welche $J_{02} + \bar{J}_{21}$ dadurch erleidet, gleich

$$E(x_2\, y_2\, p_2\, q_2, \bar{p}_2\, \bar{q}_2)\,\sigma + \left(\sigma\, \xi\, \eta\, \frac{d\xi}{dt}\, \frac{d\eta}{dt}\right)_2$$

wo $p_2\, q_2$ die Richtungscosinus von 02 im Punkte 2, $\bar{p}_2\, \bar{q}_2$ die von 12 im Punkte 2 und $x_2\, y_2$ die Coordinaten dieses Punktes sind. Lassen wir dagegen die Bogenlänge 12 um σ abnehmen, so wird die Änderung von $J_{02} + \bar{J}_{21}$ gleich:

$$-E(x_2\, y_2, p_2\, q_2, \bar{p}_2 \bar{q}_2)\,\sigma + \left(\sigma\, \xi\, \eta\, \frac{d\xi}{dt}\, \frac{d\eta}{dt}\right)_2$$

Da nun σ und $\xi\, \eta\, \frac{d\xi}{dt}\, \frac{d\eta}{dt}$ gleichzeitig unendlich klein werden, so stellt

$$E(x_2\, y_2, p_2\, q_2, \bar{p}_2\, \bar{q}_2)$$

den Differentialquotienten der Summe $J_{02} + \bar{J}_{21}$

dar, dieselbe betrachtet als Function der Bogenlänge 12. Fällt der Punkt 2 mit 1 zusammen, so ist $J_{\bar{0}2} + \bar{J}_{21} = \bar{J}_{\bar{0}1}$; fällt dagegen 2 mit 0 zusammen, so ist $J_{\bar{0}2} + \bar{J}_{21} = J_{\bar{0}0} + \bar{J}_{01}$. Hiernach folgt somit:

1) Wenn die Function E längs 021 nicht positiv und nicht überall gleich Null ist, so ist:

$$J_{\bar{0}1} > J_{\bar{0}0} + \bar{J}_{01}$$

2.) Wenn dagegen die Function E längs 021 nicht negativ und nicht überall gleich Null ist, so ist:

$$J_{\bar{0}1} < J_{\bar{0}0} + \bar{J}_{01}$$

Wir werden nun im folgenden Capitel nachweisen, dass man den die Curve $\bar{0}01$ einhüllenden Flächenstreifen so schmal annehmen kann, dass man vom Punkte $\bar{0}$ aus nach irgend einem andern Punkte desselben nur eine der Differentialgleichung genügende Curve ziehen kann, welche ganz innerhalb dieses Flächenstreifens liegt. Setzen wir dies hier voraus, so folgt, dass das Integral $J_{\bar{0}1}$ identisch ist mit $J_{\bar{0}01}$ und ferner, dass das Integral $J_{\bar{0}0}$ identisch ist mit dem über die Strecke $\bar{0}0$ erstreckten Teile des Integrals $J_{\bar{0}01}$, und man erhält somit:

im ersten Falle: $J_{01} > \bar{J}_{01}$

" zweiten " : $J_{01} < \bar{J}_{01}$

Es ist demnach die Maximal- bez. die Minimaleigenschaft, der der Differentialgleichung $G^0 - \lambda G^1 = 0$ genügenden Curve bewiesen, ausser in dem Falle, wo längs der ganzen Curve 021 die Function ε gleich 0 ist.

Wir werden aber später zeigen, dass für den Fall, wo in dem construirten Raume $\int_0^1 (F_1^0 - \lambda F_1^1)(1-\varepsilon)\,d\varepsilon$ nicht gleich Null wird, die Function ε nicht längs einer ganzen Curve verschwinden kann, oder was dasselbe ist, dass nicht überall längs derselben $p\bar{q} - q\bar{p} = 0$ ist.

Nachdem dies für eine reguläre Curve bewiesen ist, folgt dasselbe für eine aus regulären Stücken zusammengesetzte, da, wie bereits mehrfach gezeigt wurde, plötzliche Richtungsänderungen innerhalb der betrachteten Curven von keinem Einfluss auf die angewendeten Schlussfolgerungen sind. – Endlich gilt dasselbe für ganz beliebige Curven, die zwischen 0 und 1 gezogen werden können, und welche hinreichend nahe an der der Differentialgleichung genügenden Curve liegen, wofern nur für sie die beiden Integrale einen Sinn haben. Man kann dabei ähnlich,

wie dies oben pag. geschehen ist, die Bedeutung der Integrale erweitern, indem man für dieselben Summen von Integralen substituirt, die sich über Stücke von regulären Curven erstrecken, welche eine Reihenfolge von Punkten der betrachteten Curve verbinden und festgesetzt, dass wenn sich diese Curven endlich festen Werten nähern, indem man die Anzahl der herausgegriffenen Punkte grösser und kleiner grösser, und die Entfernung zweier aufeinanderfolgender kleiner und kleiner werden lässt, diese Grenzwerte zugleich die Werte der ursprünglichen Integrale angeben sollen. Natürlich muss der sich so für das zweite Integral ergebende Wert identisch sein mit dem für dasselbe vorgeschriebenen Werte.

Haben die Integrale über eine beliebige Curve in diesem Sinne einen bestimmten Wert, so ist zunächst klar, dass z. B. im Falle eines Maximums das Integral I^0 für sie nicht grösser sein kann, als das über die der Differentialgleichung genügende Curve erstreckte. Denn als dann könnten wir doch aus regulären Stücken eine Curve zusammensetzen, deren Integral beliebig

wenig von jenem verschieden ist, also auch grösser ist als das über die Curve G_{-0} erstreckte Integral, was jedoch nach dem Vorhergehenden nicht möglich ist. Es muss aber jenes Integral sogar kleiner sein als dieses, wie man folgendermassen zeigen kann: Es sei 2 ein Punkt der willkürlichen Curve hinreichend nahe bei 01; dann können wir zwei Stücke von Curven, die der Differentialgleichung genügen, nämlich von 0 nach 2 und von 2 nach 1 ziehen, so dass die entsprechenden Raumcurven 0'2' und 2'1' sind. Um 0'2' und 2'1' können wir nun ähnlich wie um 0'1' einen Raumteil abgrenzen mit den analogen Eigenschaften, u. wenn wir den Raumteil um 0'1' hinreichend klein genommen haben, so wird die willkürliche Curve innerhalb des Raumteils liegen, welcher 0'2' und 2'1' umgiebt. Das Integral, erstreckt über dieselbe ist also nach dem Obigen nicht grösser als das Integral, erstreckt über die beiden Stücke von der Differentialgleichung genügenden Curven, dieses aber ist kleiner als J_{01}, folglich ist auch das Integral der willkürlichen Curve kleiner als J_{01}.

Es muss hier eine Einschränkung bemerkt wer-

dern, welche wir stillschweigend gemacht haben. Wir zogen nämlich die Curve 021 so, dass die ihr entsprechende Raumcurve in jenem oben definirten Raumteile lag. Nun könnte es aber Curven 021 in einer beliebig kleinen Umgebung von 01 geben, deren entsprechende Raumcurve nicht in jenen Raumteil fiel, und für solche Variationen wäre dann durch unsere Schlussfolgerungen die Maximal- resp. Minimaleigenschaft nicht erwiesen. Unser Beweis bezieht sich nur auf solche Variationen, bei denen die Aenderung des Wertes des zweiten Integrals in entsprechenden Punkten mit den Variationen der Coordinaten zugleich unendlich klein wird.

Capitel 18.

Begründung der beiden im vorigen Capitel gemachten Behauptungen:

1) dass ein Raumteil von der vorausgesetzten Beschaffenheit construirt werden kann;

2) dass die Function z nicht längs einer ganzen Curve innerhalb desselben verschwindet.

Es seien die Coordinaten $x\,y$ einer der Differentialgleichung genügenden Curve als Functionen einer Grösse t gefunden. Dieselben enthalten drei Constanten, zwei Integrationsconstanten $\alpha\,\beta$ und die Constante λ. Sind alsdann $x\,y\,z$ die Coordinaten der entsprechenden Raumcurve, so haben wir:

$$1)\; x = \varphi(t, \alpha, \beta, \lambda),\; y = \psi(t, \alpha, \beta, \lambda),\; z = \int_{t_0}^{t} F(x\,y\,x'\,y')\,dt,$$

wo $t = t_0$ dem Punkte 0 entspricht.

Durch Veränderung der drei Constanten erhalten wir eine andere Raumcurve. Die Forderung,

dass die Projection derselben durch den Punkt $\bar{o}$ gehen soll, ergiebt uns zwei Relationen zwischen den Aenderungen $\alpha' \beta' \lambda' \tau_0$ der Constanten $\alpha \beta \lambda t_0$, wo $t_0 + \tau_0$ der in den neuen Gleichungen dem Punkte $\bar{o}$ entsprechende Werth von t ist. Die neue Raumcurve hat demnach die Gleichungen:

$$x+\xi = \varphi(t+\tau, \alpha+\alpha', \beta+\beta', \lambda+\lambda'), \; y+\eta = \psi(t+\tau, \alpha+\alpha', \beta+\beta', \lambda+\lambda')$$

2.) $$z+\zeta = \int_{t_0+\tau_0}^{t+\tau} F'\left(x+\xi, \; y+\eta, \; x'+\frac{d\xi}{dt}, \; y'+\frac{d\eta}{dt}\right) dt$$

und es ist, wenn $x_0 \, y_0$ die Coordinaten des Punktes $\bar{o}$ sind:

3) $$x_0 = \varphi(t_0+\tau_0, \alpha+\alpha', \beta+\beta', \lambda+\lambda'), \; y_0 = \psi(t_0+\tau_0, \alpha+\alpha', \beta+\beta', \lambda+\lambda')$$

Diese Gleichungen stellen für hinreichend kleine Werthe von $\alpha' \beta' \lambda' \tau_0$, welche den letzten beiden Gleichungen genügen, sämmtliche Raumcurven dar, welche die Differentialgleichung befriedigen und deren Projection auf die xy-Ebene in ihrer Anfangsrichtung hinreichend wenig von der Anfangsrichtung der Projection der ursprünglichen Curve abweicht. Denn man kann τ_0, $\alpha' \beta'$ als Potenzreihen von λ' und der trigonometrischen Tangente des Winkels darstellen, welchen die beiden Anfangsrichtungen mit einander bilden. Bezeichnet man diese Tangente mit $\varkappa$, so ist nach pag.

$$4.)\quad (\varphi'^2(t_0)+\psi'^2(t_0))\,\kappa = (\psi'(t_0)\,\varphi''(t_0) - \varphi'(t_0))\,\tau_0 + (\psi'(t_0) - \varphi'(t_0)\,\psi_1'(t_0))\,\alpha'$$
$$+ (\psi'(t_0)\,\varphi_2'(t_0) - \varphi'(t_0)\,\psi_2'(t_0))\,\beta' + (\psi'(t_0)\,\varphi_3'(t_0) - \varphi'(t_0)\,\psi_3'(t_0))\,\lambda' + (\tau_0\,\alpha'\,\beta'\,\lambda')_2$$

Dabei ist:

$$\varphi_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\,, \quad \psi_3 = \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}$$

und ferner bestehen noch, da beide Curven denselben Anfangspunkt haben sollen, die Gleichungen:

$$5.)\quad \begin{aligned} 0 &= \varphi'(t_0)\,\tau_0 + \varphi_1(t_0)\,\alpha' + \varphi_2(t_0)\,\beta' + \varphi_3(t_0)\,\lambda' + (\tau_0\,\alpha'\,\beta'\,\lambda')_2 \\ 0 &= \psi'(t_0)\,\tau_0 + \psi_1(t_0)\,\alpha' + \psi_2(t_0)\,\beta' + \psi_3(t_0)\,\lambda' + (\tau_0\,\alpha'\,\beta'\,\lambda')_2 \\ \lambda' &= \lambda' \end{aligned}$$

Die Determinante der linearen Glieder der rechten Seite in diesen Gleichungen 4) und 5) ist gleich

$$\begin{vmatrix} \psi'(t_0)\varphi''(t_0) - \varphi'(t_0)\psi''(t_0), & \psi'(t_0) - \varphi'(t_0)\,\psi_1'(t_0), & \psi'\varphi_2' - \varphi'\psi_2', & \psi'\varphi_3' - \varphi'\psi_3' \\ \varphi'(t_0) & \varphi'(t_0) & \varphi_2(t_0), & \varphi_3(t_0) \\ \psi'(t_0) & \psi'(t_0) & \psi_2(t_0), & \psi_3(t_0) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Setzt man hierin:

$$6)\quad D_\nu(t_0) = \psi'(t_0)\,\varphi_\nu(t_0) - \varphi'(t_0)\,\psi_\nu(t_0)\,, \qquad \nu = 1\,2\,3.$$

so wird dieselbe, wenn man die zweite Horizontalreihe mit $\psi''(t_0)$ die dritte mit $-\varphi''(t_0)$ multiplicirt und dann beide zur ersten addirt:

$$\begin{vmatrix} 0, & D_1'(t_0), & D_2(t_0) \\ \varphi'(t_0), & \varphi'(t_0), & \varphi_2(t_0) \\ \psi'(t_0), & \psi'(t_0), & \psi_2(t_0) \end{vmatrix}$$

oder

$$\mathfrak{J}_2(t_0)\,\mathfrak{J}'_1(t_0) - \mathfrak{J}_1(t_0)\,\mathfrak{J}'_2(t_0)$$

und dies ist eine Grösse, welche nach unseren Annahmen, wie wir später sehen werden, nicht verschwindet. Mithin kann man in der That t_0 $\alpha'\beta'$ als Potenzreihe von κ und λ' darstellen, und es ergiebt somit jedes hinreichend klein gewählte Wertepaar $\kappa\lambda'$ eine Raumcurve. Aus der Differentialgleichung folgt aber analog, wie pag. , dass einem Wertpaare $\kappa\lambda'$ nur eine einzige Curve entspricht, dass somit jede Curve durch Anfangspunkt und Anfangsrichtung und gegebenen Wert von λ vollkommen bestimmt ist. Daraus schliessen wir ebenso wie pag. dass uns die Gleichungen 4) und 5) alle der ursprünglichen Curve benachbarten und durch denselben Anfangspunkt gehen Curven liefern, welche der Differentialgleichung genügen.

Es handelt sich nun darum, die Constanten so zu wählen, dass die neue Raumcurve durch irgend einen Punkt $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ geht, der in der Nähe irgend eines Punktes $x\,y\,z$ der alten liegt. Wenn wir also t einer bestimmten

Wert und $\xi\ \eta\ \zeta$ hinreichend kleine Werte geben, so müssen die Gleichungen erfüllt werden können:

$$0 = \varphi'(t_0)\tau_0 + \varphi_1(t_0)\alpha' + \varphi_2(t_0)\beta' + \varphi_3(t_0)\lambda' + (\tau_0\,\alpha'\beta'\lambda')_2$$

$$0 = \psi'(t_0)\tau_0 + \psi_1(t_0)\alpha' + \psi_2(t_0)\beta' + \psi_3(t_0)\lambda' + (\tau_0\,\alpha'\beta'\lambda')_2$$

$$\eta = \psi'(t_0)\tau_1 + \psi_1(t_0)\alpha' + \psi_2(t_0)\beta' + \psi_3(t_0)\lambda' + (\tau_1\,\alpha'\beta'\lambda')_2$$

$$\zeta = \frac{dF'}{dx'}\xi + \frac{dF'}{dy'}\eta + \int_{t_0}^{t} G'(y'\xi - x'\eta)\,dt + (\quad)_2$$

Nun ist:

$$y'\xi - x'\eta = \vartheta_1(t)\alpha' + \vartheta_2(t)\beta' + \vartheta_3(t)\lambda' + (\ldots)_2$$

Setzen wir also:

$$8)\quad \Theta_\nu(t_0 t) = \int_{t_0}^{t} G'\,\vartheta_\nu(t)\,dt, \qquad \nu = 1\,2\,3$$

so wird:

$$9.)\quad \zeta = \frac{dF'}{dx'}\xi + \frac{dF'}{dy'}\eta + \Theta_1(t_0 t)\alpha' + \Theta_2(t_0 t)\beta' + \Theta_3(t_0, t)\lambda' + (\ldots)_2$$

Denken wir uns jetzt statt ξ und η ebenfalls ihre Potenzreihen in $\tau\ \alpha'\beta'\lambda'$ eingesetzt, so wird die Determinante der linearen Glieder der rechten Seite in den Gleichungen 7 und 9, nach einer leicht ersichtlichen Umformung:

$$10)\quad \Delta(t_0, t) = \begin{vmatrix} \varphi'(t_0), & 0, & \varphi_1(t_0), & \varphi_2(t_0), & \varphi_3(t_0) \\ \psi'(t_0), & 0, & \psi_1(t_0), & \psi_2(t_0), & \psi_3(t_0) \\ 0, & \varphi'(t), & \varphi_1(t), & \varphi_2(t), & \varphi_3(t) \\ 0, & \psi'(t), & \psi_1(t), & \psi_2(t), & \psi_3(t) \\ 0, & 0, & \Theta_1(t_0 t), & \Theta_2(t_0 t), & \Theta_3(t_0, t) \end{vmatrix}$$

Wir nehmen nun an, dass diese Determinan-

de, nicht für beliebige Werte von t verschwinde, welchen Fall wir als Ausnahme betrachten und der Untersuchung mit den für ihn geltenden Formeln überlassen.

Dem ersten Wert von t von t_0 ab, für welchen $\mathfrak{I}(t_0, t)$ verschwindet, wollen wir wieder den zu t_0 conjugirten Punkt nennen. Man sieht alsdann, dass wenn die obere Grenze t_1 der Integrale vor dem zu t_0 conjugirten Punkte liegt, die Curve in einen Raumteil von der verlangten Beschaffenheit eingehüllt werden kann. Denn man kann dann immer falls nur $\xi\ \eta\ \zeta$ klein genug gewählt werden, $\tau\ \tau_0\ \alpha'\ \beta'\ \lambda'$ als Potenzreihen von $\xi\ \eta\ \zeta$ darstellen, also stets eine und nur eine der Differentialgleichung genügende Raumcurve construiren, welche durch die Punkte 0 und $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ hindurchgeht und in ihrer Lage beliebig wenig von der ursprünglichen Curve abweicht.

Diesen Raumcurven entsprechen andere Functionen, $\mathfrak{I}(t_0, t)$. Wenn jene aber hinreichend nahe der ursprünglichen Curve liegen, so werden auch die ihnen entsprechenden Functionen $\mathfrak{I}$ ebenfalls für keinen ihrer Punkte

verschwinden, so dass also bis zu jedem Punkte in einer hinreichend kleinen Umgebung irgend eines Punktes derselben ebenfalls von $\bar{o}$ aus eine der Differentialgleichung genügende Raumcurve gezogen werden kann. Wir müssen ferner beweisen, dass wenn t_1 über den zu t_0 conjugirten Punkt hinausliegt, die Curve kein Maximum oder Minimum darbieten kann. Da der Punkt $\bar{o}$ beliebig nahe an o gewählt werden kann, und der zu t_0 conjugirte Punkt sich mit t_0 stetig ändert, so muss gezeigt werden, dass t_1 nicht jenseits des zu o conjugirten Punktes liegen darf. Alsdann ist alles erledigt, ausgenommen den Fall, dass t_1 gerade mit dem zu 0 conjugirten Punkte zusammenfällt, welchen wir jedoch wieder der besonderen Untersuchung überlassen müssen, da es dabei eintreten kann, dass die Curve ein Maximum oder Minimum darbietet oder nicht.

Zur strengeren Begründung des Gesagten bedarf es einer eingehenden Betrachtung der Function $D(t_0 t)$. Die Raumcurve, welche wir durch Aenderung der Constanten erhielten, ist durch die

Anfangsrichtung ihrer Projection im Punkte $\bar{0}$ und durch die Differentialgleichung $G^0 - (\lambda + \lambda')G^1 = 0$, der sie genügen muss, bestimmt. Hieraus müssen also auch die Eigenschaften der Function $\vartheta(t_0, t)$ gefolgert werden können.

Wir stellen also die Änderung auf, welche $G^0 - \lambda G^1$ erleidet, wenn darin $\alpha\,\beta\,\lambda$ die Änderung erfahren $\alpha'\beta'\lambda'$; diese muss für beliebige Werte von $\alpha'\beta'\lambda'$ verschwinden. Es ist:

$$\Delta G = G^0(x+\xi, y+\eta) - G^0(x\,y) - \lambda\left(G^1(x+\xi, y+\eta) - G^1(x\,y)\right) - \lambda' G^1(x\,y)$$

Nach den Entwickelungen pag. ist aber

$$G^0(x+\xi, y+\eta) - G^0(x,y) = F_2^0(y'\xi - x'\eta) - \frac{d}{dt}\left(F_1^0 \frac{d(y'\xi - x'\eta)}{dt}\right) + \left(\xi\,\eta\,\frac{d\xi}{dt}\,\frac{d\eta}{dt}\right)_2$$

$$G^1(x+\xi, y+\eta) - G^0(x,y) = F_2^1(y'\xi - x'\eta) - \frac{d}{dt}\left(F_1^1 \frac{d(y'\xi - x'\eta)}{dt}\right) + \left(\xi\,\eta\,\frac{d\xi}{dt}\,\frac{d\eta}{dt}\right)_2$$

Folglich:

$$\Delta G = F_2(y'\xi - x'\eta) - \frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{d(y'\xi - x'\eta)}{dt}\right) - \lambda' G^1 + \left(\xi\,\eta\,\frac{d\xi}{dt}\,\frac{d\eta}{dt}\right)_2$$

Bezeichnet man die Glieder erster Dimension in der Entwickelung von $y'\xi - x'\eta$ nach Potenzen von $\tau\,\alpha'\beta'\lambda'$ mit w, also

$$w = \vartheta_1(t)\alpha' + \vartheta_2(t)\beta' + \vartheta_3(t)\lambda',$$

so wird:

$$11.)\quad \Delta G = -\frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{dw}{dt}\right) + F_2 w - \lambda' G^1(x\,y) + (\tau\,\alpha'\beta'\lambda')_2$$

Da nun diese Grösse für beliebige Werte von $\tau\,\alpha'\beta'\lambda'$ Null sein muss, so müssen die

Coefficienten der Glieder der Potenzreihe einzeln gleich Null sein. Beschränken wir uns auf die linearen Glieder, so ergiebt dies die folgenden drei Differentialgleichungen:

$$F_1 \frac{d^2 \vartheta_1}{dt^2} + \frac{dF_1}{dt} \frac{d\vartheta_1}{dt} - F_2 \vartheta_1 = 0$$

12.) $$F_1 \frac{d^2 \vartheta_2}{dt^2} + \frac{dF_1}{dt} \frac{d\vartheta_2}{dt} - F_2 \vartheta_2 = 0$$

$$F_1 \frac{d^2 \vartheta_3}{dt^2} + \frac{dF_1}{dt} \frac{d\vartheta_3}{dt} - F_2 \vartheta_3 + G' = 0$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit ϑ_3, die dritte mit $-\vartheta_1$ und addirt, so kommt:

$$\frac{d}{dt}\left(F_1\left(\vartheta_3 \frac{d\vartheta_1}{dt} - \vartheta_1 \frac{d\vartheta_3}{dt}\right)\right) = \vartheta_1 G';$$

multiplicirt man ebenso die zweite mit ϑ_3, die dritte mit $-\vartheta_2$ und addirt, so wird:

$$\frac{d}{dt}\left(F_1\left(\vartheta_3 \frac{d\vartheta_2}{dt} - \vartheta_2 \frac{d\vartheta_3}{dt}\right)\right) = \vartheta_2 G'$$

und endlich, wenn man die erste mit ϑ_2, die zweite mit $-\vartheta_1$ multiplicirt und beide addirt:

$$\frac{d}{dt}\left(F_1\left(\frac{d\vartheta_1}{dt} \vartheta_2 - \vartheta_1 \frac{d\vartheta_2}{dt}\right)\right) = 0$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt daher:

$$\Theta_1(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} G' \vartheta_1(t)\, dt = \left[F_1\left(\vartheta_3 \frac{d\vartheta_1}{dt} - \vartheta_1 \frac{d\vartheta_3}{dt}\right)\right]_{t_0}^{t}$$

13.) $$\Theta_2(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} G' \vartheta_2(t)\, dt = \left[F_1\left(\vartheta_3 \frac{d\vartheta_2}{dt} - \vartheta \frac{d\vartheta_3}{dt}\right)\right]_{t_0}$$

$$F_1\left(\vartheta_2 \frac{d\vartheta_2}{dt} - \vartheta_1 \frac{d\vartheta_2}{dt}\right) = C.$$

Hierin bedeutet C eine Constante, welche nicht verschwinden darf; denn alsdann wäre:

$$\frac{d}{dt}\log \vartheta_1 = \frac{d}{dt}\log \vartheta_2$$

oder

$$\vartheta_1 = \text{const}\ \vartheta_2$$

Wie man leicht erkennt, lässt sich aber $\Delta(t_0, t)$ in der Form darstellen:

$$\Delta(t_0,t) = \begin{vmatrix} \vartheta_1(t_0), & \vartheta_2(t_0), & \vartheta_3(t_0) \\ \vartheta_1(t), & \vartheta_2(t), & \vartheta_3(t) \\ \Theta_1(t_0,t), & \Theta_2(t_0,t), & \Theta_3(t_0,t) \end{vmatrix}$$

Wäre nun $\vartheta_1(t) = \text{const}.\ \vartheta_2(t)$, so wäre auch $\Theta_1(t_0,t) = \text{const}.\ \Theta_2(t_0,t)$ und es würde somit die Determinante $\Delta(t_0,t)$, da in ihr zwei Verticalreihen bis auf einen Factor identisch gleich sind, für beliebige Werte von t verschwinden, welchen Fall wir schon oben ausgeschlossen haben.

Nunmehr schreiten wir zu dem Beweise, dass $\Delta(t_0,t)$ beim Verschwinden sein Zeichen wechselt. Es ist:

$$\frac{d\Delta(t_0,t)}{dt} = \begin{vmatrix} \vartheta_1(t_0), & \vartheta_2(t_0), & \vartheta_3(t_0) \\ \vartheta_1(t), & \vartheta_2(t), & \vartheta_3(t) \\ \frac{d\Theta_1(t_0,t)}{dt}, & \frac{d\Theta_2(t_0,t)}{dt}, & \frac{d\Theta_3(t_0,t)}{dt} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vartheta_1(t_0), & \vartheta_2(t_0), & \vartheta_3(t_0) \\ \vartheta_1(t), & \vartheta_2(t), & \vartheta_3(t) \\ \vartheta\Theta_1(t_0,t), & \vartheta\Theta_2(t_0,t), & \vartheta\Theta_3(t_0,t) \end{vmatrix}$$

Da nach 8) $\frac{d\Theta_\nu}{dt} = G'\vartheta_\nu(t)$ ist, so verschwindet die erste Determinante und mithin ist:

15) $$\frac{d\mathcal{D}(t_0,t)}{dt} = \begin{vmatrix} \vartheta_1(t_0), & \vartheta_2(t_0), & \vartheta_3(t_0) \\ \vartheta_1'(t), & \vartheta_2'(t), & \vartheta_3'(t) \\ \Theta_1(t_0,t), & \Theta_2(t_0,t), & \Theta_3(t_0,t) \end{vmatrix}$$

Führen wir nun folgende Bezeichnungen ein:

16) $$\begin{aligned} f_1(t) &= \vartheta_2(t_0)\,\vartheta_3(t) - \vartheta_3(t_0)\,\vartheta_2(t) \\ f_2(t) &= \vartheta_3(t_0)\,\vartheta_1(t) - \vartheta_1(t_0)\,\vartheta_3(t) \\ f_3(t) &= \vartheta_1(t_0)\,\vartheta_2(t) - \vartheta_2(t_0)\,\vartheta_1(t) \end{aligned}$$

so können wir schreiben:

$$\mathcal{D}(t_0,t) = \sum_{\nu=1}^{3} f_\nu(t)\,\Theta_\nu(t_0,t)$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{D}(t_0,t) = \sum_{\nu=1}^{3} f_\nu'(t)\,\Theta_\nu(t_0,t)$$

Mithin ist:

17.) $$\begin{aligned} f_3(t)\frac{d}{dt}\mathcal{D}(t_0,t) - f_3'(t)\,\mathcal{D}(t_0,t) = {} & (f_3(t)\,f_1'(t) - f_1(t)\,f_3'(t))\,\Theta_1(t_0,t) \\ & + (f_3(t)\,f_2'(t) - f_2(t)\,f_3'(t))\,\Theta_2(t_0,t) \end{aligned}$$

oder:

18.) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathcal{D}(t_0,t)}{f_3(t)}\right) = \frac{(f_3(t)\,f_1'(t) - f_1(t)\,f_3'(t))\,\Theta_1(t_0,t) + (f_3(t)\,f_2'(t) - f_2(t)\,f_3'(t))\,\Theta_2(t_0,t)}{f_3^2(t)}$$

Der Zähler dieses Ausdrucks ist gleich E, multiplicirt mit dem Quadrat einer gewissen Größe. Denn setzen wir:

19.) $$E = \begin{vmatrix} \vartheta_1(t_0) & \vartheta_2(t_0) & \vartheta_3(t_0) \\ \vartheta_1(t) & \vartheta_2(t_0) & \vartheta_3(t) \\ \vartheta_1'(t) & \vartheta_2'(t) & \vartheta_3'(t) \end{vmatrix} = \vartheta_1'(t)\,f_1(t) + \vartheta_2'(t)\,f_2(t) + \vartheta_3'(t)\,f_3(t)$$

so folgt, da zugleich die Gleichung:

20) $$\vartheta_1(t_0)\,f_1(t) + \vartheta_2(t_0)\,f_2(t) + \vartheta_3(t_0)\,f_3(t) = 0$$

besteht, wie sich aus 16) unmittelbar ergiebt:

$$\vartheta_2(t_0)E_1 = (\vartheta_2(t_0)\vartheta_1'(t) - \vartheta_1(t_0)\vartheta_2'(t)) f_1(t) + (\vartheta_2(t_0)\vartheta_3'(t) - \vartheta_3(t_0)\vartheta_2'(t)) f_3(t)$$

21) $\vartheta_2(t_0)E_1 = f_3(t) f_1'(t) - f_1(t) f_3'(t)$

In ähnlicher Weise ergiebt sich:

21) $-\vartheta_1(t_0)E_1 = f_3(t) f_2'(t) - f_2(t) f_3'(t)$

Der Zähler der rechten Seite der Gleichung 18) kann demnach zunächst gesetzt werden gleich:

22) $E_1(\vartheta_2(t_0)\Theta_1(t_0,t) - \vartheta_1(t_0)\Theta_2(t_0,t))$

Nun war aber nach Gleichung 13)

$$\Theta_1(t_0,t) = [F_1(\vartheta_3(t)\vartheta_1'(t) - \vartheta_1(t)\vartheta_3'(t))]_{t_0}^{t}$$

$$\Theta_2(t_0,t) = [F_1(\vartheta_3(t)\vartheta_2'(t) - \vartheta_2(t)\vartheta_3'(t))]_{t_0}^{t}$$

Mithin:

$$\vartheta_2(t_0)\Theta_1(t_0,t) - \vartheta_1(t_0)\Theta_2(t_0,t) = [F_1\vartheta_3(t)(\vartheta_2(t_0)\vartheta_1'(t) - \vartheta_1(t_0)\vartheta_2'(t))]_{t_0}^{t} + F_1(t)\vartheta_3'(t) f_3$$

Ferner ist:

$$[F_1\vartheta_3(t)(\vartheta_2(t_0)\vartheta_1'(t_0)\vartheta_2'(t))]_{t_0}^{t} = [F_1(\vartheta_2(t)\vartheta_1'(t) - \vartheta_1(t)\vartheta_2'(t))]_{t_0}^{t}\vartheta_3(t_0)$$
$$+ [F_1(\vartheta_3(t)\vartheta_2'(t) - \vartheta_1(t)\vartheta_3'(t))]_{t_0}^{t}\vartheta_2'(t_0)$$
$$- F_1(t)\vartheta_3(t_0)(\vartheta_2(t)\vartheta_1'(t) - \vartheta_1(t)\vartheta_2'(t))$$

Da nun aber nach der dritten Gleichung 13) $F_1(\vartheta_2(t)\vartheta_1'(t) - \vartheta_1(t)\vartheta_2'(t))$ von t unabhängig ist, so ist das erste Glied der rechten Seite in vorstehender Gleichung gleich Null und mithin:

23) $\vartheta_2(t_0)\Theta_1(t_0,t) - \vartheta_1(t_0)\Theta_2(t_0,t) = F_1(t)(\vartheta_1'(t) f_1(t) + \vartheta_2'(t) f_2(t) + \vartheta_3'(t) f_3)$

$$= F_1(t)\cdot E_1$$

Mithin wird nach 22) aus Gleichung 18):

$$24)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathfrak{D}(t_0,t)}{f_3(t)}\right) = F_1(t)\cdot\left(\frac{E}{f_3(t)}\right)^2$$

Es möge nun $\mathfrak{D}(t_0,t)$ für irgend einen Wert $t=t'$ mit der Ordnungszahl $\varkappa$ verschwinden, so dass die Entwickelung von $\mathfrak{D}(t_0,t)$ nach Potenzen von $t-t'$ mit der $\varkappa^{ten}$ Potenz anfängt. Wenn dann $f_3(t)$ für $t=t'$ nicht verschwindet, so fängt die Entwickelung von

$$f_3(t)\frac{d}{dt}\mathfrak{D}(t_0,t) - f_3'(t)\,\mathfrak{D}(t_0,t)$$

sicher mit der $\varkappa-1$ Potenz von $t-t'$ an. Dieser Ausdruck ist aber gleich $F_1\cdot E_1^2$ und da nach unserer Annahme F_1 für die ganze Curve nicht verschwindet und nicht unendlich wird, so muss $F_1 E^2$ mit einer geraden Potenz von $t-t'$ beginnen. $\varkappa-1$ ist mithin eine gerade, folglich $\varkappa$ eine ungerade Zahl. Mithin wechselt $\mathfrak{D}(t_0,t)$ beim Verschwinden sein Zeichen.

Gesetzt, es verschwände auch $f_3(t)$ für $t=t'$, dann darf sicher nicht zugleich $f_3''(t)$ verschwinden. Denn aus den beiden Gleichungen:

$$\vartheta_1(t_0)\,\vartheta_2(t') - \vartheta_2(t_0)\,\vartheta_1(t') = 0$$

$$\vartheta_1(t_0)\,\vartheta_2'(t') - \vartheta_2(t_0)\,\vartheta_1'(t') = 0$$

würde folgen, falls nicht zugleich $\vartheta_1(t_0)=0$ und $\vartheta_2(t_0)=0$ ist:

$$\mathfrak{D}_1(t')\,\mathfrak{D}_2'(t') - \mathfrak{D}_2(t')\,\mathfrak{D}_1'(t') = 0;$$

aber sowohl die beiden Gleichungen $\mathfrak{D}_1(t_0) = 0$ und $\mathfrak{D}_2(t_0) = 0$ wie die Gleichung $\mathfrak{D}_1(t')\mathfrak{D}_2'(t') - \mathfrak{D}_2(t')\,\mathfrak{D}_1'(t') = 0$ widersprechen der Gleichung 13)

$$F_1(\mathfrak{D}_1(t)\,\mathfrak{D}_2'(t) - \mathfrak{D}_2(t)\,\mathfrak{D}_1'(t)) = -C$$

da, wie wir zeigten, C von Null verschieden und F_1 weder gleich Null noch gleich unendlich ist. $f_3(t)$ und $f_3'(t)$ können daher nicht gleichzeitig verschwinden. Wenn also $f_3(t)$ für $t = t'$ verschwindet, so fängt die Entwicklung nach Potenzen von $t - t'$ mit der ersten Potenz an. Setzen wir daher

$$\mathfrak{D}(t_0, t) = C(t - t')^{\kappa} + \ldots$$

$$f_3(t) = c(t - t') + \ldots,$$

so fängt die Entwickelung von $f_3(t)\frac{d}{dt}\mathfrak{D}(t_0, t) - f_3'(t)\,\mathfrak{D}(t_0, t)$ mit dem Gliede

$$cC(\kappa - 1)(t - t')^{\kappa}$$

an, ausser wenn $\kappa = 1$ ist; denn dann ist der Coefficient dieses Gliedes gleich 0. Für $\kappa = 1$ wechselt aber $\mathfrak{D}(t_0, t)$ sicher beim Verschwinden sein Zeichen. Wir werden nun zeigen, dass E_1 für ein verschwindendes $f_3(t)$ nur dann gleich Null sein kann, wenn zugleich $f_1(t) = 0$ und $f_2(t) = 0$ ist. Wenn aber E_1 nicht für $t = t'$ verschwindet, so ist $\kappa = 0$, also kann dann auch $\mathfrak{D}(t_0, t)$ für $t = t'$

nicht verschwinden. Es ist also dann bis auf den einen Fall, dass zugleich $f_1(t)=0$, $f_2(t)=0$, $f_3(t)=0$ ist, nachgewiesen, dass $D(t_0, t)$ beim Verschwinden sein Zeichen ändert.

Wie oben bewiesen, können die beiden Grössen $D_1(t_0)$ und $D_2(t_0)$ nicht gleichzeitig Null sein. Ist also etwa $D_1(t_0) \gtrless 0$, so folgt aus:

$$f_3(t)=0, \; E=0, \; f_3(t)f_2'(t) - f_2(t)\cdot f_3'(t) = -D_1(t_0)E,$$

dass auch $f_2(t)=0$ ist, und dann folgt aus $D_1(t_0)f_1(t) + D_2(t_0)f_2(t) + D_3(t_0)f_3(t) = 0$ dass auch $f_1(t)=0$ ist. Ebenso folgt, wenn $D_2(t_0) \gtrless 0$ ist, aus

$$f_3(t)=0, \; E=0, \; f_3(t)f_1'(t) - f_1(t)f_3'(t) = D_2(t_0)E$$

dass $f_1(t)=0$ und daraus, dass $f_2(t)=0$ ist.

Wir haben also bis auf den Fall $f_1(t)=f_2(t)=f_3(t)=0$ bewiesen, dass $D(t_0, t)$ beim Verschwinden sein Zeichen ändert, und auch in diesem Falle ist es nicht ausgeschlossen, nur nicht bewiesen, dass $D(t_0, t)$ sich ebenso verhält.

Nehmen wir an, dass wenigstens eine der drei Grössen $f_\nu(t)$ von Null verschieden ist, so können wir die geometrische Bedeutung conjugirter Punkte angeben.

Die Bedingung dafür, dass unter den Raumcurven, die durch die Zunahmen $\alpha' \beta' \gamma'$ der drei

Constanten $\alpha\,\beta\,\lambda$ gegeben werden, sich eine solche befindet, welche die ursprüngliche Raumcurve in dem Punkte t' schneidet, wird nach den Gleichungen 7) und 9) durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi'(t_0)\tau_0 + \varphi_1(t_0)\alpha' + \varphi_2(t_0)\beta' + \varphi_3(t_0)\lambda' + (\tau_0\alpha'\beta'\lambda')_2 \\ 0 &= \psi'(t_0)\tau_0 + \psi_2(t_0)\alpha' + \psi_2(t_0)\beta' + \psi_3(t_0)\lambda' + (\tau_0\alpha'\beta'\lambda')_2 \\ 0 &= \varphi'(t')\tau + \varphi'(t')\alpha' + \varphi_2(t')\beta' + \varphi_3(t')\lambda' + (\tau\alpha'\beta'\lambda')_2 \\ 0 &= \psi'(t')\tau + \psi'(t')\alpha' + \psi_2(t')\beta' + \psi_3(t')\lambda' + (\tau\alpha'\beta'\lambda')_2 \\ 0 &= \Theta_1(t_0,t')\alpha' + \Theta_2(t_0,t')\beta' + \Theta_3(t_0,t')\lambda' + (\alpha'\beta'\lambda')_2 \end{aligned} \tag{25}$$

oder wenn wir τ_0 und τ eliminiren:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{d}_1(t_0)\alpha' + \mathfrak{d}_2(t_0)\beta' + \mathfrak{d}_3(t_0)\lambda' + (\alpha'\beta'\lambda')_2 \\ 0 &= \mathfrak{d}_1(t')\alpha' + \mathfrak{d}_2(t')\beta' + \mathfrak{d}_3(t')\lambda' + (\alpha'\beta'\lambda')_2 \\ 0 &= \Theta_1(t_0,t')\alpha' + \Theta_2(t_0,t')\beta' + \Theta_3(t_0,t)\lambda' + (\alpha'\beta'\lambda')_2 \end{aligned} \tag{26}$$

Die Elimination von α' und β' ergiebt:

$$0 = \mathfrak{D}(t_0,t')\lambda' + (\lambda')_2$$

oder:

$$0 = \mathfrak{D}(t_0,t') + (\lambda')$$

Wäre nun $\mathfrak{D}(t_0,t')$ von Null verschieden, so könnte man für λ eine Grenze, so klein man will, annehmen von der Art, dass für alle λ', deren absoluter Betrag unterhalb derselben liegt, stets $|\mathfrak{D}(t_0,t')| > |(\lambda')|$ ist, und dass somit kein Wert von t' gefunden werden könnte, welcher die vorher-

-gehende Gleichung befriedigt. Es wird also, wenn t'' ein bestimmter Wert von t' ist, für den $\mathcal{D}(t_0, t'')$ von Null verschieden ist, auch innerhalb eines gewissen Intervalles $t''-\tau_1 \ldots t''+\tau_2$ kein Wert von t' liegen, welcher jene Gleichung befriedigt. Mithin finden sich unter den Raumcurven, für welche $\alpha' \beta' \lambda'$ hinreichend kleine Werte haben, keine, welche die erste Raumcurve in der Nähe von t'' schneiden. Anders verhält es sich aber, wenn wir für t' ein Intervall $t''-\tau$ bis $t''+\tau$ zulassen, welches den zu t_0 conjugirten Punkt t'' enthält, innerhalb dessen also $\mathcal{D}(t_0, t')$ verschwindet. Denn alsdann hat $\mathcal{D}(t_0, t')$ für $t''-\tau$ und $t''+\tau$ entgegengesetztes Zeichen, wir können daher, nachdem ein beliebig kleines τ festgesetzt ist, λ' immer so klein annehmen, dass auch:

$$\mathcal{D}(t_0, t') + (\lambda')$$

für $t' = t''-\tau$ und $t' = t''+\tau$ entgegengesetztes Zeichen hat, und es mithin einen Wert von t' innerhalb dieses Intervalles giebt, für welchen die Gleichung $\mathcal{D}(t_0, t') + \lambda') = 0$ erfüllt ist. D. h. Wenn man von den zu 0 conjugirten Punkt ein noch so kleines Intervall abgrenzt, und eine noch so kleine obere Grenze für $\alpha' \beta' \lambda'$ festsetzt, so giebt es

unter den zugelassenen Raumcurven immer solche, welche von $\bar{o}$ ausgehen und die ursprüngliche Curve innerhalb jenes Intervalles schneiden. Ja wenn $\alpha'\beta'\lambda'$ unterhalb einer gewissen Grösse liegen, so schneiden alle Raumcurven, für welche $\alpha'\beta'\lambda'$ nicht grössere Werte haben, und welche durch $\bar{o}$ hindurchgehen, die ursprüngliche Curve innerhalb des Intervalles. Diese obere Grenze für $\alpha'\beta'\lambda'$ wird mit dem Intervall zugleich unendlich klein, so dass der zu $\bar{o}$ conjugirte Punkt definirt werden kann als derjenige Punkt, welchem sich die Schnittpunkte benachbarter Raumcurven nähern.

Auf ähnliche Art kann man beweisen, dass man um einen Punkt der Raumcurve, der nicht zu $\bar{o}$ conjugirt ist, einen so kleinen Raumteil abgrenzen kann, dass die zu $\bar{o}$ conjugirten Punkte auf den Raumcurven mit hinreichend kleinen $\alpha'\beta'\lambda'$ ebenfalls nicht in demselben liegen, dass dagegen, wenn man einen noch so kleinen Raumteil um den zu $\bar{o}$ conjugirten Punkt construirt, die zu $\bar{o}$ conjugirten Punkte auf den Raumcurven mit hinreichend kleinen $\alpha'\beta'\lambda'$ sämmtlich innerhalb desselben liegen.

Ganz ebenso folgt ferner, dass in $D(t_0, t)$ t_0 sich stetig ändert, der erste Wert von t, für welchen $D(t_0, t)$ verschwindet, sich ebenfalls stetig ändert. Denn es ist:

$$D(t_0 + \varepsilon, t) = D(t_0, t) + (\varepsilon, t),$$

worin (ε, t) eine Grösse bezeichnet, die für jeden Wert von t mit ε unendlich klein wird. Für $t = t' - \tau$ und $t = t' + \tau$, wo t' der zu t_0 conjugirte Punkt ist, hat $D(t_0, t)$ verschiedenes Zeichen, wie klein auch τ sei. Nehme ich also ε hinreichend klein an, so hat auch $D(t_0 t) + (\varepsilon, t)$ für $t = t' - \tau$ und $t = t' + \tau$ verschiedenes Zeichen, verschwindet also für einen Wert von t innerhalb des Intervalls $t' - \tau \ldots t' + \tau$. Die Aenderung des conjugirten Punktes ist daher beliebig klein für eine hinreichend kleine Aenderung von t_0.

Wir kommen jetzt zu dem Beweis des Satzes, dass eine Strecke der Curve über den zum Anfangspunkte conjugirten Punkt hinaus kein Maximum oder Minimum darbieten kann, dass also ein Teil der Curve, welcher den zum Anfangspunkt conjugirten Punkt enthält, immer so variirt werden kann, dass ΔI^0 sowohl positiv als negativ wird, ohne dass

J' geändert wird.

Nach früheren Entwickelungen ist

$$\Delta J' = \int_{t_0}^{t_1} G' w \, dt + \left(\xi \; \eta \; \frac{d\xi}{dt} \; \frac{d\eta}{dt}\right)_2$$

falls w für $t = t_0$ und $t = t_1$ verschwindet. Setzen wir wie pag.

$$\xi = \kappa u + \kappa_1 u_1$$
$$\eta = \kappa v + \kappa_1 v_1$$
$$w = \kappa w_1 + \kappa_1 w_2,$$

so ist:

$$\Delta J' = \kappa \int_{t_0}^{t_1} G' w_1 \, dt + \kappa_1 \int_{t_0}^{t} G' w_2 \, dt + (\kappa, \kappa_1)_2$$

Ist w_1 so gewählt, dass

$$27) \quad \int_{t_0}^{t_1} G' w_1 \, dt = 0$$

ist, so ergiebt die Bedingung $\Delta J' = 0$ κ_1 als Potenzreihe von κ, welche mit einer höheren als der erster Potenz von κ anfängt. Demnach wird:

$$w = \kappa w_1 + (\kappa)_2$$

und

$$\Delta J^0 = \kappa^2 \int_{t_0}^{t_1} \left\{ F_1 \left(\frac{dw_1}{dt}\right)^2 + F_2 w_1^2 \right\} dt + (\kappa)_3$$

oder was dasselbe ist:

$$28) \quad \Delta J^0 = \varepsilon \kappa^2 \int_{t_0}^{t_1} w_1^2 \, dt + \kappa^2 \int_{t_0}^{t_1} \left\{ F_1 \left(\frac{dw_1}{dt}\right)^2 + (F_2 - \varepsilon) w_1^2 \right\} dt + (\kappa)_3$$

worin ε eine disponible beliebig kleine Grösse ist. Wir werden nun zeigen, dass wenn t_1 jenseits des zu t_0 conjugirten Punktes liegt, der absolute Betrag von ε so klein gewählt werden kann, dass w_1

ausser der Bedingung 27) noch die folgende

$$29) \int_{t_0}^{t_1} \left\{ F_1 \left(\frac{dw_1}{dt}\right)^2 + (F_2 - \varepsilon)\, w_1^2 \right\} dt = 0$$

befriedigt, ohne überall Null zu sein. Alsdann hat, falls nur k hinreichend klein gewählt wird, was uns immer frei steht, ΔJ^0 das Zeichen von $\varepsilon k^2 \int_{t_0}^{t_1} w_1^2\, dt$, also das Zeichen von ε; ε aber kann positiv und negativ sein.

Statt $\int_{t_0}^{t_1} \left(F_1 \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + (F_2 - \varepsilon)\, w_1^2\right) dt$ können wir, da w_1 für t_0 und t_1 verschwindet, nach pag. auch schreiben:

$$\int_{t_0}^{t} \left\{ (F_2 - \varepsilon)\, w_1 - \frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{dw_1}{dt}\right) \right\} w_1\, dt.$$

und statt der beiden Gleichungen:

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ (F_2 - \varepsilon)\, w_1 - \frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{dw_1}{dt}\right) \right\} w_1\, dt \quad \text{und} \quad 0 = \int_{t_0}^{t_1} G' w_1\, dt$$

können wir die beiden ihnen äquivalenten setzen:

$$30) \quad \begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} G' w_1\, dt = 0 \\ \int_{t_0}^{t_1} \left\{ (F_2 - \varepsilon)\, w_1 - \frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{dw_1}{dt}\right) - c_3 G' \right\} w_1\, dt = 0 \end{cases}$$

wo c_3 irgend eine von t unabhängige Grösse ist.

Es seien nun $\vartheta_1(t, \varepsilon)$, $\vartheta_2(t, \varepsilon)$, $\vartheta_3(t, \varepsilon)$ drei Functionen von t, welche den folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$\frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{d\vartheta_1(t,\varepsilon)}{dt}\right) - (F_2 - \varepsilon)\,\vartheta_1(t,\varepsilon) = 0$$

$$31)\quad \frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{d\vartheta_2(t,\varepsilon)}{dt}\right) - (F_2 - \varepsilon)\,\vartheta_2(t,\varepsilon) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{d\vartheta_3(t,\varepsilon)}{dt}\right) - (F_2 - \varepsilon)\,\vartheta_3(t,\varepsilon) + G' = 0,$$

dazu folgt aus der Theorie der Differentialgleichungen, dass für eine Reihe von Werten von t, für welche F_1 weder Null noch unendlich wird, $\vartheta_1(t,\varepsilon)$, $\vartheta_2(t,\varepsilon)$ $\vartheta_3(t,\varepsilon)$ sich von den drei Functionen $\vartheta_1(t)$, $\vartheta_2(t)$, $\vartheta_3(t)$ um Grössen unterscheiden, welche mit ε zugleich unendlich klein werden.

Es sei nun t' der zu t_0 conjugirte Punkt. Wir setzen dann für die Strecke von t_0 bis zu einem vor t' gelegenen Punkte t''

$$w_1 = c_1\vartheta_1(t,\varepsilon) + c_2\vartheta_2(t,\varepsilon) + c_3\vartheta_3(t,\varepsilon),$$

und für die Strecke von t'' bis t_1

$$w_1 = 0.$$

Dann ist sicher w_1 nicht überall Null, wenn nicht $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ ist; denn in Folge der drei Differentialgleichungen 31), welchen $\vartheta_1(t,\varepsilon)$, $\vartheta_2(t,\varepsilon)$, $\vartheta_3(t,\varepsilon)$ genügen, könnte eine lineare Gleichung für eine Reihe von Werten von t nur dann bestehen, wenn für dieselben Werte $G' = 0$ wäre, welchen Fall wir bereits pag. ausgeschlossen haben.

Es genügt alsdann w_1 der Differentialglei-

chung:

$$\frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{dw_1}{dt}\right) - F_2 - \varepsilon)\, w_1 + l_3 G' = 0$$

und es sind nur noch die Bedingungen zu erfüllen, dass w_1 für t_0 und t'' verschwindet, und dass $\int_{t_0}^{t_1} G' w_1\, dt = 0$ ist. Es ist aber:

$$\int_{t_0}^{t''} G' w_1 dt = l_1 \int_{t_0}^{t''} G' \mathfrak{J}_1(t,\varepsilon)\, dt + l_2 \int_{t_0}^{t''} G' \mathfrak{J}_2(t,\varepsilon)\, dt + l_3 \int_{t_0}^{t''} G' \mathfrak{J}_3(t,\varepsilon)\, dt$$

und setzen wir:

$$\int_{t_0}^{t''} G' \mathfrak{J}_\nu (t,\varepsilon)\, dt = \Theta_\nu(t_0, t'' \varepsilon),$$

so wird nach Obigem sich auch $\Theta_\nu(t_0, t''\varepsilon)$ von $\Theta_\nu(t_0, t'')$ um eine Grösse unterscheiden, die mit ε zugleich unendlich klein wird. Die noch zu erfüllenden Bedingungen sind also:

$$0 = l_1 \mathfrak{J}_1(t_0,\varepsilon) + l_2 \mathfrak{J}_2(t_0,\varepsilon) + l_3 \mathfrak{J}_3(t_0,\varepsilon)$$

32) $$0 = l_1 \mathfrak{J}_1(t'',\varepsilon) + l_2 \mathfrak{J}_2(t'',\varepsilon) + l_3 \mathfrak{J}_3(t'',\varepsilon)$$

$$0 = l_1 \Theta_1(t_0, t''\varepsilon) + l_2 \Theta_2(t_0, t''\varepsilon) + l_3 \Theta(t_0, t''\varepsilon)$$

Die Determinante dieser Gleichung unterscheidet sich offenbar von $\mathfrak{D}(t_0, t'')$ nur um eine Grösse, welche zugleich mit ε unendlich klein wird. Für $t'' = t' - \tau$ und $t'' = t' + \tau$ hat $\mathfrak{D}(t_0, t'')$ verschiedenes Zeichen; demnach kann man ε so klein wählen, dass auch die Determinante obiger Gleichungen für $t'' = t' - \tau$ und $t'' = t' + \tau$ verschiedenes Zeichen hat, also für einen Wert von t'' zwischen $t' - \tau$ und $t' + \tau$

verschwindet. Man kann somit t' vor t, so bestimmen, dass die drei Gleichungen 32) erfüllbar sind durch Werte von $e_1\ e_2\ e_3$, welche nicht sämmtlich Null sind.

Wenn dann κ hinreichend klein ist, so hat δJ^0 das Vorzeichen von ε und da dieses willkürlich ist, so giebt es also unter den zugelassenen Variationen der Curve sowohl solche, für welche J^0 eine positive, als auch solche, für welche J^0 eine negative Änderung erleidet.

Das Curvenstück 01 darf also nicht über den zu 0 conjugirten Punkt hinausgehen. Nehmen wir daher den Fall aus, dass 1 gerade mit dem zu 0 conjugirten Punkte zusammenfällt, so muss 1 vor dem zu 0 conjugirten Punkte liegen. Alsdann kann man $\bar{0}$ so nahe vor 0 annehmen, dass 1 auch vor dem zu $\bar{0}$ conjugirten Punkte liegt. Längs eines solchen Curvenstücks verschwindet demnach $\mathfrak{D}(t_1, t)$ nicht und es kann somit dasselbe in einen Raumteil von der verlangten Beschaffenheit eingehüllt werden.

Es bleibt uns nur noch übrig, den Fall zu discutiren, wo die Function $E(x\,y, p\,q, \bar{p}\,\bar{q})$ längs

einer beliebigen, innerhalb jenes Raumteiles liegenden Curve verschwindet. Nehmen wir dabei den Fall aus, dass das Integral

$$\int_0^1 \{F_1^0(xy, p\varepsilon\, q\varepsilon) - \lambda F_1'(xy, p\varepsilon\, q\varepsilon)\}(1-\varepsilon)\,d\varepsilon$$ für

jeden Punkt derselben gleich 0 ist, so müsste, wenn ε verschwinden soll, überall

$$q\bar{p} - p\bar{q} = 0$$

sein, d. h. die Richtung der Projection der beliebigen Raumcurve müsste in jedem Punkte mit der Richtung der Projection der nach demselben Raumpunkte gezogenen, der Differentialgleichung genügenden Curve zusammenfallen. Sind $x\,y\,z$, $x_1\,y_1\,z_1$ die Coordinaten der Bogenlängen t und t', so wäre also für den betreffenden Punkt:

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt'}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt'}$$

Da nun aber:

$$z = \int_{t_0}^{t} F'\left(xy, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) dt, \quad z_1 = \int_{t_0}^{t'} F\left(x_1 y_1, \frac{dx_1}{dt'}, \frac{dy_1}{dt'}\right) dt'$$

ist, so ist auch:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz_1}{dt'}$$

d. h. die beiden Raumcurven haben in jenem Punkte ebenfalls dieselbe Richtung.

Die Grössen:

$$\varphi(t_1+\tau, \alpha+\alpha', \beta+\beta', \lambda+\lambda'), \ \psi(t_1+\tau, \alpha+\alpha', \beta+\beta', \lambda+\lambda'), \ \int_{t_0}^{t_1+\tau} F(\varphi, \psi, \varphi', \psi')\,dt$$

stellen die Coordinaten der benachbarten Raumcurven

in der Nähe des Punktes t_1 dar. Betrachtet man hierin $\tau\ \alpha'\ \beta'\ \lambda'$ als Functionen einer Grösse κ, welche zugleich mit κ unendlich klein werden, so sind die obigen drei Grössen für successive Werte von κ die Coordinaten der Punkte einer gewissen Curve, welche durch t_1 hindurchgeht, und zwar kann man jede durch t_1 gehende Curve in dieser Weise darstellen, wenn man nur die Functionen von κ passend wählt.

Sollte es nun eine Raumcurve geben, längs deren $E=0$ wäre, so müsste ihre Richtung in dem Punkte $\tau\ \alpha'\ \beta'\ \lambda'$, wie wir vorher sahen, mit der Richtung der durch $\alpha'\ \beta'\ \lambda'$ bestimmten, der Differentialgleichung genügenden Curve in eben jenem Punkte zusammenfallen. Die Richtungscosinus der letzteren sind proportional den Grössen:

a) $\varphi'(t_1+\tau, \alpha+\alpha', \beta+\beta', \lambda+\lambda')\ \psi'(t_1+\tau, \alpha+\alpha', \beta+\beta', \lambda+\lambda'),\ \frac{dF'}{dx'}\varphi' + \frac{\partial F'}{\partial y'}\psi'$

und die der ersteren proportional den Grössen:

$$\varphi'(t_1+\tau, \alpha+\alpha', \beta+\beta', \lambda+\lambda')\frac{d\tau}{d\kappa} + \frac{d\varphi}{d\kappa},\ \psi'(t_1+\tau, \alpha+\alpha', \beta+\beta', \lambda+\lambda')\frac{dt}{d\kappa} + \frac{d\psi}{d\kappa},$$

$$\left(\frac{dF'}{\partial x'}\varphi' + \frac{dF'}{\partial y'}\psi'\right)\frac{d\tau}{\partial\kappa} + \int_{t_0}^{t_1+\tau}\left\{\frac{dF'}{\partial x}\frac{d\varphi}{d\kappa} + \frac{\partial F'}{\partial y}\frac{d\psi}{d\kappa} + \frac{\partial F'}{\partial x'}\frac{\partial\varphi'}{\partial\kappa} + \frac{\partial F'}{\partial y'}\frac{d\psi'}{d\kappa}\right\}dt$$

wobei in $\frac{d\varphi}{d\kappa}, \frac{d\psi}{d\kappa}, \frac{d\varphi'}{d\kappa}\ \frac{d\psi'}{d\kappa}$ nur noch $\alpha'\ \beta'\ \lambda'$ als von κ abhängig zu betrachten sind. Das im letzten Ausdrucke auftretende Integral lässt sich ebenso, wie dies pag.   mit dem Integrale 4) für δI

geschehen ist, umformen. Beachtet man dabei die Definitionen 8) dieses Capitels, so ergiebt sich, dass die Richtungscosinus der beliebigen Curve proportional sind den Ausdrücken:

$$\varphi'(t_1+\tau, \alpha+\alpha', \beta+\beta', \lambda+\lambda')\frac{d\tau}{dk}+\frac{d\varphi}{dk},\ \psi'(t_1+\tau, \alpha+\alpha', \beta+\beta', \lambda+\lambda')\frac{d\tau}{dk}+\frac{d\psi}{dk},$$

b) $$\left(\frac{dF'}{dx'}\varphi'+\frac{dF'}{dy'}\psi'\right)\frac{d\tau}{dk}+\Theta_1(t_0, t_1+\tau)\frac{d\alpha'}{dk}+\Theta_2(t_0, t_1+\tau)\frac{d\beta'}{dk}+\Theta_3(t_0, t_1+\tau)\frac{d\lambda'}{dk}+\frac{dF'}{dx'}\frac{d\varphi}{dk}+\frac{dF'}{dy'}\frac{d\psi}{dk}$$

Sollen nun die Richtungen unsrer beiden Curven in dem betrachteten Punkte zusammenfallen, so müssten die drei aus den Grössen a) und b) zu bildenden Unterdeterminanten verschwinden. Dieselben sind aber identisch mit den Unterdeterminanten der Grössen:

$$\varphi'(t_1+\tau, \alpha+\alpha', \beta+\beta', \lambda+\lambda'),\ \psi'(t_1+\tau, \alpha+\alpha', \beta+\beta', \lambda+\lambda')\ \frac{dF'}{dx'}\varphi'+\frac{dF'}{dy'}\psi'$$

$$\frac{d\varphi}{dk},\ \frac{d\psi}{dk},\ \frac{dF'}{dx'}\frac{d\varphi}{dk}+\frac{dF'}{dy'}\frac{d\psi}{dk}+\Theta_1\frac{d\alpha'}{dk}+\Theta_2\frac{d\beta'}{dk}+\Theta_3\frac{d\lambda'}{dk};$$

demnach sind die drei Grössen der ersten Reihe den entsprechenden Grössen der zweiten Reihe proportional. Lässt man k zu 0 werden, so gehen diese Grössen in folgende über:

$$\varphi'(t_1, \alpha, \beta, \lambda),\ \psi'(t_1, \alpha, \beta, \lambda),\ \frac{dF'}{dx'}\varphi'(t_1, \alpha, \beta, \lambda)+\frac{dF'}{dy'}\psi'(t_1, \alpha, \beta, \lambda),$$

$$\varphi_1(t_1, \alpha, \beta, \lambda)\left(\frac{d\alpha'}{dk}\right)_0+\varphi_2\left(\frac{d\beta'}{dk}\right)_0+\varphi_3\left(\frac{d\lambda'}{dk}\right)_0,\quad \psi_1\left(\frac{d\alpha'}{dk}\right)_0+\psi_2\left(\frac{d\beta'}{dk}\right)_0+\psi_3\left(\frac{d\lambda'}{dk}\right)_0,$$

$$\frac{dF'}{dx'}\left(\varphi_1\left(\frac{d\alpha'}{dk}\right)_0+\varphi_2\left(\frac{d\beta'}{dk}\right)_0+\varphi_3\left(\frac{d\lambda'}{dk}\right)_0\right)+\frac{dF'}{dy'}\left(\psi_1\left(\frac{d\alpha'}{dk}\right)_0+\psi_2\left(\frac{d\beta'}{dk}\right)_0+\psi_3\left(\frac{d\lambda'}{dk}\right)_0\right)+\Theta_1(t_0, t_1)\left(\frac{d\alpha'}{dk}\right)_0$$

$$+\Theta_2\left(\frac{d\beta'}{dk}\right)_0+\Theta_3\left(\frac{d\lambda'}{dk}\right)_0$$

Bezeichnet daher $-\varrho$ einen Proportionalitätsfac–

tor, so ergeben sich die drei Gleichungen:

$$0 = \varphi_1 \left(\frac{d\alpha'}{dk}\right)_0 + \varphi_2 \left(\frac{d\beta'}{dk}\right)_0 + \varphi_3 \left(\frac{d\lambda'}{dk}\right)_0 + \varrho\varphi'$$

$$0 = \psi_1 \left(\frac{d\alpha'}{dk}\right)_0 + \psi_2 \left(\frac{d\beta'}{dk}\right)_0 + \psi_3 \left(\frac{d\lambda'}{dk}\right)_0 + \varrho\psi'$$

33) $$0 = \Theta_1 \left(\frac{d\alpha'}{dk}\right)_0 + \Theta_2 \left(\frac{d\beta'}{dk}\right)_0 + \Theta_3 \left(\frac{d\lambda'}{dk}\right)_0,$$

von denen die dritte bereits mit Anwendung der beiden ersten auf diese Form reducirt worden ist. Da nun die der Differentialgleichung genügende Curve durch den Punkt t_0 gehen soll, so müssen $\alpha'\beta'\lambda'$ noch der Relation genügen:

$$0 = \mathfrak{D}_1(t_0)\,\alpha' + \mathfrak{D}_2(t_0)\,\beta' + \mathfrak{D}_3(t_0)\,\lambda' + (\alpha'\beta'\lambda')_2,$$

aus welcher folgt:

34.) $$0 = \mathfrak{D}_1(t_0)\left(\frac{d\alpha'}{dk}\right)_0 + \mathfrak{D}_2(t_0)\left(\frac{d\beta'}{dk}\right)_0 + \mathfrak{D}_3(t_0)\left(\frac{d\lambda'}{dk}\right)_0$$

Die Determinante der Gleichungen 33 und 34, ist nun aber identisch mit

$$\mathfrak{D}(t_0, t_1)$$

Verschwindet daher $\mathfrak{D}(t_0, t_1)$ nicht, so haben diese Gleichungen keine andere Lösung als

$$\left(\frac{d\alpha'}{dk}\right)_0 = \left(\frac{d\beta'}{dk}\right)_0 = \left(\frac{d\lambda'}{dk}\right)_0 = 0$$

Dieselben Schlüsse lassen sich aber für irgend einen kleinen Wert von k machen, dem die Werte $\tau, \alpha_1', \beta_1', \lambda_1'$ entsprechen, nur tritt dann an Stelle von $\mathfrak{D}(t_0, t_1)$ die Grösse $\mathfrak{D}(t_0, t_1+\tau_1, \alpha+\alpha_1', \beta+\beta_1', \lambda+\lambda_1')$

Da aber auch diese für hinreichend kleine Werte von t, $\alpha' \beta' \lambda'$ von Null verschieden ist, sobald es $\Delta(t_0, t_1)$ ist, so ist auch für diesen Wert von κ

$$\frac{d\alpha'}{d\kappa} = \frac{d\beta'}{d\kappa} = \frac{d\lambda'}{d\kappa} = 0$$

$\alpha' \beta' \lambda'$ verändern sich also nicht mit κ und sind daher 0, da sie für $\kappa = 0$ Null sind. Das heisst aber nichts anderes, als dass die Curve, längs welcher die Function $E = 0$ wäre, mit der ursprünglichen Curve zusammenfallen müsste; dann wäre sie aber keine Variation der letzteren.

Wäre aber $\Delta(t_0, t_1) = 0$, so würde t_1 der zu t_0 conjugirte Punkt sein, und da dies für jeden Punkt t_1 der willkürlichen Curve gelten soll, so würde die willkürliche Curve eine von den zum Anfangspunkt t_0 conjugirten Punkten gebildete Curve sein und würde somit ausserhalb oder höchstens an der Grenze des von uns betrachteten Raumteiles liegen.

Es giebt somit innerhalb des angenommenen Raumteiles keine Curve, längs deren die Function $E(x\,y, p\,q, \bar{p}\,\bar{q})$ überall verschwände. Damit ist aber der Gegenstand dieses Capitels erledigt.

Zum Schluss wollen wir nur noch auf Grund der vorhergehenden Untersuchungen für die beiden in Capitel 14 und 15 behandelten Aufgaben den Beweis der Maximal- resp. Minimaleigenschaft der gefundenen Curve vollständig führen.

In dem Falle des isoperimetrischen Problems war:

$$F = -y\,x' - \lambda\sqrt{x'^2 + y'^2}$$

$$\frac{dF}{dx'} = -y - \lambda\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = -y - \lambda p,\quad \frac{dF}{dy'} = -\lambda\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = -\lambda q$$

$$F_1 = -\frac{\lambda}{\sqrt{x'^2+y'^2}^{\,3}}$$

$$x = a + \lambda\cos t\,,\quad y = b + \lambda\sin t$$

$$\mathcal{E}(x\,y,\,p\,q,\,\bar{p}\,\bar{q}) = \lambda(p\bar{q} + q\bar{q} - 1)$$

Hierin bedeutet λ eine positive Constante; ferner verschwinden x' und y' nirgends gleichzeitig und daher ist F_1 überall von Null und unendlich verschieden, so dass kein Ausnahmefall vorliegt, der einer besonderen Untersuchung zu unterwerfen wäre. Der Ausdruck $p\bar{q} + q\bar{q}$ stellt den Cosinus der beiden Richtungen $p\,q$ und $\bar{p}\,\bar{q}$ dar; somit besitzt die Function $\mathcal{E}$, wie es sein muss, wenn ein Maximum stattfinden soll

für keinen Punkt und für keine Richtung einen positiven Wert.

Sind demnach zwei Punkte 0 und 1 durch einen Kreisbogen von vorgeschriebener Länge verbunden, welcher mit irgend einer festen die beiden Punkte verbindenden Curve einen Flächeninhalt einschliesst, der durch das über den ganzen Umfang erstreckte Integral

$$\int_{t_0}^{t} -y x' dt$$

dargestellt wird, und soll bewiesen werden, dass man die beiden Punkte durch keine andere Curve von derselben Länge verbinden kann, welche mit der festen Curve einen grösseren Flächeninhalt einschliesst, so wird der Beweis hierfür erbracht sein, sobald Folgendes gezeigt ist: Ist zwischen den beiden Punkten eine beliebige andere Curve von der vorgeschriebenen Länge gezogen, so kann man nach irgend einem Punkte 2 derselben von 0 aus einen Kreisbogen legen, welcher dieselbe Länge hat wie jene Curve zwischen den Punkten 0 und 2. Lässt man diesen Punkt 2 die Curve durchlaufen, so sind die successiven Kreisbogen Variationen von einander

und ihre Längen in entsprechenden Punkten unendlich wenig von einander verschieden. Befindet sich der Punkt 2 hinreichend nahe beim Anfangspunkt, so ist der ihm entsprechende Kreisbogen beliebig klein; fällt er dagegen mit dem Endpunkt zusammen, so geht er in den Kreisbogen über, für den die Maximaleigenschaft bewiesen werden soll. – Dies ist nun alles erfüllt, sobald wir festsetzen, dass jeder Kreisbogen nur einmal durchlaufen werden soll und derselbe so construirt wird, wie pag. angegeben ist. Denn alsdann giebt es in der That zwischen den Punkten 0 und 2 nur einen einzigen Kreisbogen von gegebener Länge, die successiven Lagen des Punktes 2 entsprechenden Kreisbogen sind Variationen von einander und ihre Längen in entsprechenden Punkten unendlich wenig von einander verschieden, und es gehen somit die Kreisbogen, wenn Punkt 2 mit zusammenfällt, in den ursprünglichen zwischen 0 und 1 gezogenen stetig über. – Was die Determinante $D(t_0, t)$ anlangt, so ist in unserem Falle

$$x = a + r \cos t, \quad y = b + r \sin t$$

$\vartheta_1(t) = \lambda \cos t, \quad \vartheta_2(t) = \lambda \sin t, \quad \vartheta_3(t) = \lambda; \quad G' = \frac{1}{\lambda},$

$\Theta_1(t_0, t) = \sin t - \sin t_0, \quad \Theta_2(t_0, t) = \cos t_0 - \cos t, \quad \Theta_3(t_0, t) = t - t_0$

$f_1(t) = \lambda^2(\sin t_0 - \sin t), \quad f_2(t) = \lambda^2(\cos t - \cos t_0), \quad f_3(t) = \lambda^2 \sin(t - t_0)$

Hieraus wird:

$$\vartheta(t_0, t) = \begin{vmatrix} \lambda \cos t_0 & \lambda \sin t_0 & \lambda \\ \lambda \cos t & \lambda \sin t & \lambda \\ \sin t - \sin t_0 & \cos t_0 - \cos t & t - t_0 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 \{ (t - t_0) \sin (t - t_0) + 2 \cos (t - t_0) - 2 \}$$

$$= 4 \lambda^2 \sin \frac{t - t_0}{2} \left\{ \frac{t - t_0}{2} \cos \frac{t - t_0}{2} - \sin \frac{t - t_0}{2} \right\}$$

Wie man hieraus ersieht verschwindet $\vartheta(t_0, t)$ zum ersten Male wieder für $t = t_0 + 2\pi$; es liefert somit $t = t_0 + 2\pi$ den zum Anfangspunkte conjugirten Punkt. In der That, denken wir uns den Anfangspunkt und Endpunkt zusammenfallend, so dass die der Differentialgleichung genügende Curve ein vollständiger Kreis wird, so bietet diese Curve kein Maximum mehr dar, wenigstens nicht in dem Sinne, dass bei jeder beliebig kleinen Variation der Curve der Flächeninhalt kleiner würde; denn man könnte ja den Kreis congruent mit sich beliebig verschieben, also die Curve variiren, ohne Flächeninhalt und Länge zu verändern.

Es ist interessant zu bemerken, dass bei die-

sem Problem ein Fall eintritt, welcher in der allgemeinen Theorie nicht erledigt werden konnte, nämlich der, dass $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ gleichzeitig mit $\mathfrak{D}(t_0, t)$ verschwinden. In der That ist für $t = t_0 + 2\pi$

$\mathfrak{D}(t_0, t) = 0$ und $f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) = 0$

Nichtsdestoweniger ändert aber $\mathfrak{D}(t_0, t)$ beim Verschwinden sein Zeichen; denn das Nullwerden von $\mathfrak{D}(t_0, t)$ ist bedingt durch das Verschwinden des Factors $\sin \frac{t - t_0}{2}$, dieser ändert aber sein Zeichen, während der zweite Factor für $t = t_0 + 2\pi$ sein Zeichen beibehält.

Bei dem im 15ten Capitel behandelten Beispiele, also bei der Curve mit tiefstem Schwerpunkt, ist:

$$F = (y - \lambda)\sqrt{x'^2 + y'^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = (y - \lambda)\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = (y - \lambda)p, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = (y - \lambda)\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = (y - \lambda)q$$

$$F_1 = \frac{y - \lambda}{\sqrt{x'^2 + y'^2}^{\,3}}$$

$$x = \alpha + \beta t, \qquad y = \lambda + \frac{\beta}{2}(e^t + e^{-t})$$

$$E(x\,y, p\,q, \bar{p}\,\bar{q}) = (y - \lambda)(1 - (p\bar{p} + q\bar{q}))$$

Wie wir pag.   sahen, ist $y - \lambda > 0$; ferner verschwinden x' und y' nirgends gleichzeitig, mithin ist F_1 überall von Null und unendlich ver-

schieden. Da $p\bar{p}+q\bar{q}$ als Richtungscosinus der beiden Richtungen $p\,q$ und $\bar{p}\,\bar{q}$ stets kleiner als 1 höchstens gleich 1 ist, so ist die Function E, wie es für den Fall eines Maximums sein muss, nirgends negativ. Da wir nun pag. bewiesen haben, dass sich zwischen zwei beliebig gegebenen Punkten, falls nur die Bogenlänge hinreichend gross ist, stets eine und nur eine der Differentialgleichung genügende Curve ziehen lässt, so folgt daraus, dass es hier keine conjugirten Punkte geben kann, und dass somit die Kettenlinie in ihrer ganzen Ausdehnung die verlangte Minimaleigenschaft besitzt.

Dass bei diesem Problem keine conjugirten Punkte vorhanden sind, so ergiebt sich auch aus der Betrachtung der Determinante $\Delta(t_0, t)$. Es ist nämlich:

$$x = \alpha + \beta t, \qquad y = \lambda + \frac{\beta}{2}(e^t + e^{-t}), \qquad G = \frac{4}{\beta(e^t+e^{-t})^2}$$

$$\vartheta_1(t) = \frac{\beta}{2}(e^t - e^{-t}), \quad \vartheta_2(t) = \frac{\beta}{2}\,t(e^t - e^{-t}) - \frac{\beta}{2}(e^t + e^{-t}), \quad \vartheta_3(t) = -\beta$$

$$\Theta_1(t_0, t) = 2\,\frac{e^t + e^{-t} - (e^{t_0} + e^{-t_0})}{(e^{t_0}+e^{-t_0})(e^t+e^{-t})}, \quad \Theta_2(t_0,t) = 2\,\frac{t_0(e^t+e^{-t}) - t(e^{t_0}+e^{-t_0})}{(e^{t_0}+e^{-t_0})(e^t+e^{-t})}, \quad \Theta_3(t_0,t) = -2\,\frac{e^{-t_0}(e^t+e^{-t}) - e^{-t}(e^{t_0}+e^{-t_0})}{(e^{t_0}+e^{-t_0})(e^t+e^{-t})}$$

Hieraus wird:

$$\Delta(t_0, t) = \frac{-\beta^2}{2(e^{t_0}+e^{-t_0})(e^t+e^{-t})}\begin{vmatrix} e^{t_0}-e^{-t_0}, & t_0(e^{t_0}-e^{-t_0}) - (e^{t_0}+e^{-t_0}), & +2 \\ e^t - e^{-t}, & t(e^t-e^{-t}) - (e^t+e^{-t}), & +2 \\ e^t+e^{-t}-(e^{t_0}+e^{-t_0}), & t_0(e^t+e^{-t}) - t(e^{t_0}+e^{-t_0}), & e^{-t_0}(e^t+e^{-t}) - e^{-t}(e^{t_0}+e^{-t_0}) \end{vmatrix}$$

$$= -\beta^2 \left\{ e^{t-t_0} + e^{-(t-t_0)} - \frac{t-t_0}{2}\left(e^{t-t_0} - e^{-(t-t_0)}\right) - 2 \right\}$$

$$= \beta^2 \left(e^{\frac{t-t_0}{2}} - e^{-\frac{t-t_0}{2}}\right)\left\{ \frac{t-t_0}{2}\left(e^{\frac{t-t_0}{2}} + e^{-\frac{t-t_0}{2}}\right) - \left(e^{\frac{t-t_0}{2}} - e^{-\frac{t-t_0}{2}}\right) \right\}$$

Die Gleichung $D(t_0, t) = 0$ oder

$$\frac{t-t_0}{2}\left(e^{\frac{t-t_0}{2}} + e^{-\frac{t-t_0}{2}}\right) - \left(e^{\frac{t-t_0}{2}} - e^{-\left(\frac{t-t_0}{2}\right)}\right) = 0$$

besitzt aber, wie man sich leicht überzeugt, ausser $t = t_0$ keine reellen Wurzeln weiter d. h. es existirt keine zum Punkte $t = t_0$ conjugirter Punkt.

Inhaltsverzeichniss.

I. Hauptteil. Theorie der Maxima und Minima.

pag.

Capitel 1. Theorie der Maxima und Minima von Functionen einer und mehrerer Veränderlichen ohne Nebenbedingungen.

Begriff des Maximums und Minimums einer Function einer und mehrerer Veränderlichen pag. – Die zu lösende Aufgabe besteht in der Aufsuchung der Stellen, an denen ein Extremum stattfindet pag. – Dieselben sind für Functionen einer Veränderlichen Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$ pag. – Verschwinden für diese Wurzeln noch Ableitungen der nächsthöheren Ordnungen, so tritt ein Extremum ein oder nicht, je nachdem die erste nicht verschwindende Ableitung von gerader oder ungerader Ordnung ist, pag. – Taylor'scher Satz für Functionen mehrerer Veränderlichen pg. – Extreme Werte der Function können nur eintreten für die gemeinsamen Wurzelsysteme der

pag. Gleichungen $\frac{df}{dx'}=0, \ldots \frac{df}{dx_n}=0$ pag. Verschwinden für dieselben noch Ableitungen der nächst höheren Ordnungen, so tritt ein extremer Wert sicher nicht ein, wenn die erste nicht verschwindende Ableitung von ungerader Ordnung ist; ist dieselbe aber von gerader Ordnung, so bleibt die Entscheidung dahingestellt, sobald die Ordnungszahl grösser als 2 ist, pag. – Ist diese Ordnungszahl aber gleich 2, so findet für ein solches Wurzelsystem ein Extremum der Function nur dann statt, wenn das Aggregat der Glieder zweiter Dimension in der Entwicklung von $f(a_1+h_1, \ldots a_n+h_n) - f(a_1 \ldots a_n)$ nach Potenzen der h eine definite quadratische Form ist pag. –

Wann ist daher allgemein eine homogene quadratische Form $\varphi(x_1 \ldots x_n) = \sum A_{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu$, wo $A_{\lambda\mu} = A_{\mu\lambda}$, eine definite? pag. – Einige Sätze über homogene Functionen zweiten Grades; ihre Darstellbarkeit durch eine Summe von Quadraten. pag. .... Anwendung dieser Sätze auf den vorliegenden Gegenstand. pag. – Grund, warum die gegebenen Bedingungen unzweckmässig sind pag.

pag. Capitel 2. Theorie der Maxima und Minima von Functionen von mehreren Veränderlichen unter Voraussetzung von Nebenbedingungen.

Zurückführung der Aufgabe auf die im vorigen Capitel gelöste. pag. – Grund warum dieselbe häufig praktisch unausführbar ist. pag. – Andrer Weg, um zur Lösung zu gelangen pag. – Die Grössen $x_1 \ldots x_n$, an denen ein extremer Wert stattfinden kann, sind mit den m Constanten $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m$ aus den $n+m$ Gleichungen: $\frac{dF}{dx_\mu} + \sum_{\kappa=1}^{m} \varepsilon_\kappa \frac{df_\kappa}{dx_\mu} = 0 \; (\mu = 1 \ldots n)$ $f_\lambda(x_1, \ldots x_n) \; (\lambda = 1 \ldots m)$ zu bestimmen. pag. – Verfahren, welches man etwa einschlagen kann, wenn eine im Vorhergehenden gemachte Annahme nicht erfüllt ist, und Erläuterung desselben an einem Beispiel pag. – Criterien dafür, wann an einer aus jenen $n+m$ Gleichungen bestimmten Stelle ein Extremum stattfindet und zwar auf Grund der Untersuchungen des ersten Capitels pag. – dieselben sind aber ihrer Asymmetrie wegen unzweckmässig, pag. – Erneute Untersuchung der Frage, wann eine homogene quadratische

pag. Form eine definite ist, mit der Erweiterung, dass die Veränderlichen noch Bedingungsgleichungen unterworfen sind, pag. – Reduction dieser Frage auf ein Problem der Theorie der Maxima und Minima pag. – Dasselbe führt auf die Untersuchung der Wurzeln einer gewissen Gleichung $\Delta^{\varepsilon} = 0$ pag. – Nachweis, dass die Wurzeln dieser Gleichung sämmtlich reell sind und zwar zuerst für den Fall, dass keine Bedingungsgleichungen vorhanden sind (pag.) sodann für den Fall, dass solche existiren pag. – Exacte und vollkommene symmetrische Crijterien dafür, dass ein extremer Wert der Function wirklich eintritt, pag. – Einige Bemerkungen über die praktische Anwendung derselben pag.

Capitel 3. Beispiele zur Theorie der Maxima und Minima.

Aufgabe 1. Es soll die grösste und kleinste Krümmung einer Fläche $F(xyz) = 0$ in einem gegebenen nicht singulären Punkte bestimmt werden.

Aufgabe 2. Von einem gegebenen Punkte

pag. abc soll an eine gegebene Fläche $F(xyz) = 0$ eine gerade Linie gezogen werden, deren Länge ein Maximum oder Minimum ist.

Aufgabe 3. – Unter allen Polygonen von gegebener Seitenanzahl und von gegebenem Umfang dasjenige zu finden, dessen Flächeninhalt am grössten ist. – (Die Natur dieser Aufgabe ist von der der früheren verschieden. pag. – Ausdehnung der früheren Untersuchung auf derartige Fälle pag. – Auflösung der Gleichungen, zu denen das vorgelegte Problem führt pag. – Die grösste Schwierigkeit bei derartigen Problemen liegt in dem Nachweis der Existenz eines wirklichen Extremums, pag. – Im vorliegenden Falle und in manchen ähnlichen gelingt es, diesen Existenzbeweis mit Hilfe einiger Sätze aus der allgemeinen Functionenlehre zu führen, pag. . –

II. Haupttheil. – Theorie der Variationsrechnung.

Capitel 4. – Scizzirung der Aufgabe.

Es werden 4 Aufgaben und zwar: 1, das Problem der kleinsten Rotationsfläche

pag. 2) das Problem der Brachistochrone, 3) das Problem der kürzesten Linie auf einer Fläche, 4) das isoperimetrische Problem mathematisch formulirt, um die allgemeine Aufgabe der Variationsrechnung zu veranschaulichen, pag. . – Bei der ersteren werden zwei von den älteren Analysten angewandte Methoden der Behandlung angegeben und deren Unzulänglichkeit gezeigt, pag. . – Die beiden Veränderlichen x y werden als Functionen einer dritten t gedacht und nicht wie üblich die eine als unabhängige, die andere als abhängige Veränderliche pag. – Beschränkung auf feste Grenzen, pag. – Der Unterschied des vierten Problems von den drei ersten begründet die Einleitung der Variationsrechnung in zwei Hauptteile pag. . – Definition des Begriffs der Variation einer Curve pag. . – Die in dem ersten Teile der Variationsrechnung zu lösende Aufgabe besteht darin, das Integral $I = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y')\,dt$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen. pag. . – Es wird bewiesen, dass, wenn der Wert des Integrals nur von der Gestalt der Curve abhängen soll, die Func-

pag. tion $F(xy, x'y')$ in Bezug auf $x'y'$ eine homogene Function ersten Grades sein muss. pag. . —

Capitel 5. Das Verschwinden der ersten Variation.

Unter gewissen Annahmen über die Natur der benachbarten Curven und ihrer Variationen wird die erste Variation des Integrals in eine bequemere Form transformirt. pag. . — Soll die gesammte Aenderung des Integrals beständig einerlei Zeichens sein, so muss die erste Variation verschwinden. pag. . — Auf Grund eines Hilfssatzes (pag.) folgt daraus für die Bestimmung der Curve die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung $G = 0$ oder zwei mit dieser äquivalente Gleichungen. pag. . — Aufhebung einiger Voraussetzungen. pag. . — Beweis des wichtigen Satzes, dass $\frac{\partial F}{\partial x'}$ und $\frac{\partial F}{\partial y'}$ sich längs der ganzen Curve stetig ändern, auch da, wo $x'y'$ unstetig sein sollten. pag. . ——

pag.

Capitel 6. Integration der Differentialgleichung $G=0$ für die drei ersten Aufgaben im 4^ten Capitel.

Aufgabe 1. Problem der Rotationsfläche von kleinstem Flächeninhalt. Die Aufgabe wird gelöst durch eine von einer Kettenlinie erzeugten Fläche.

Aufgabe 2. Problem der Brachistochrone. Die Aufgabe wird gelöst durch eine Cycloide.

Aufgabe 3. Problem der kürzesten Linie auf einer Fläche.

Die Aufgabe wird gelöst für eine Kugelfläche und liefert als Lösung in diesem Falle den Bogen eines grössten Kreises.

Capitel 7. Über die zweite Variation.

Transformation der zweiten Variation des Integrals auf die Form $\int_{t_0}^{t_1}\left\{F_1\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + F_2 w^2\right\}dt$ pag. — Aufhebung einiger dabei gemachten Voraussetzungen. pag.

Soll das Integral einen extremen Wert besitzen, so muss die zweite Variation beständig positiv, resp. beständig negativ

pag. sein pag. . Wann ist daher die zweite Variation beständig einerlei Zeichens? pag. Dieselbe wird auf die Form $\int_{t_0}^{t_1} F_1 \left(\frac{dw}{dt} - \frac{w}{u}\frac{du}{dt}\right)^2 dt$ gebracht mit Hilfe einer Function u, welche der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung $F_1 \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{dF_1}{dt}\frac{du}{dt} - F_2\, u = 0$ genügt pag. .- Die Transformation ist aber nur statthaft, sobald u innerhalb der Integrations-grenzen nicht verschwindet pag. .- Damit ein extremer Wert des Integrals eintrete, darf F_1 im Intervall $t_0 \ldots t_1$ sein Vorzeichen nicht wechseln pag. .- Es wird bewiesen, dass man aus der vollständigen Lösung der Gleichung $G = 0$ leicht Ausdrücke bilden kann, welche der Gleichung für u genügen und zwar stellen dieselben die beiden von einander unabhängigen particulären Integrale derselben dar, pag. .- Definition der conjugirten Punkte pag. .- Giebt es innerhalb des $t_0 \ldots t_1$ keine einander conjugirten Punkte, so giebt es auch eine den Anforderungen entsprechende Function u pag. Andeutungen, in wiefern die vorhergehenden Untersuchungen ergänzt werden müssen. pag. .—

pag.

Capitel 8. Widerlegung des von Bertrand gegen das Jacobische Criterium erhobenen Einwandes.

Bertrand glaubte entgegen der Behauptung Jacobi's, dass eine Curve auch noch über den zum Anfangspunkt conjugirten Punkt hinaus die Maximal- resp. Minimaleigenschaft beibehalten könne pag. Um dieses Bedenken Bertrand's als irrig zu erweisen, wird die zweite Variation des Integrals auf die Form

$$\int_{t_0}^{t_1} w\left\{(F_2+\varepsilon)w - \frac{d}{dt}\left((F_1+\varepsilon)\frac{dw}{dt}\right)\right\}dt - \varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\left(w^2+\left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right)dt$$

gebracht und mit Hilfe eines Satzes aus der Theorie der Differentialgleichungen (pag.) und des Satzes, dass $\Theta(t, t_0)$ beim Verschwinden sein Zeichen wechselt (pag.) bewiesen, dass es eine Function $\bar{u}$ gibt, die innerhalb des Intervalles $t_0 \ldots t_1+\tau'$ der Differentialgleichung $(F_2+\varepsilon)\bar{u} - \frac{d}{dt}\left((F_1+\varepsilon)\frac{d\bar{u}}{dt}\right) = 0$ genügt und für t_0 und $t_1+\tau'$ verschwindet (pag.) Indem man dann $w = \kappa\,\bar{u}$ setzt, reducirt sich die zweite Variation auf

$$-\varepsilon\kappa^2\int_{t_0}^{t_1+\tau'}\left\{\left(\frac{d\bar{u}}{dt}\right)^2+\bar{u}^2\right\}dt$$ und dieser Ausdruck

pag. besitzt, da ε mit F_1 stets dasselbe Zeichen hat, entgegengesetztes Zeichen mit F_1. Daraus folgt, dass ein extremer Wert des Integrals jedenfalls nicht über den zu t_0 conjugirten Punkt hinaus stattfinden kann. pag. . –

Capitel 9. Es wird bewiesen, dass die in Cap. 7 gefundenen Criterien bei Voraussetzung gewisser specieller Variationen auch hinreichend sind.

Es wird zunächst bewiesen, dass die der Differentialgleichung genügende Curve keine singulären Punkte haben, kann. pag. . – Unter der Voraussetzung der allgemeinsten unter denjenigen speciellen Variationen der Curve, für welche die bisherigen Untersuchungen überhaupt gelten, wird die vollständige Variation des Integrals in der Form dargestellt:

$$\Delta J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left\{(F_1 - k)\left\{\frac{dw}{dt} - \frac{du}{dt}\,\frac{w}{u}\right\}dt + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(1+k)\left(\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + w^2\right)dt\right.$$

(pag.)

pag. aus welchen folgt, dass wenn die bisher abgeleiteten notwendigen Bedingungen für das Eintreten eines Extremums erfüllt sind, das Vorzeichen der vollständigen Variation des Integrals mit dem der zweiten übereinstimmt. pag.

Capitel 10. Anwendung der gefundenen Criterien auf die Beispiele I und II und III in Capitel 4 im Anschluss an Capitel 6.

Aufgabe 1. Das Problem der kleinsten Rotationsfläche.

Aufgabe 2. Das Problem der Brachistochrone.

Aufgabe 3. Das Problem der kürzesten Linie auf einer Kugelfläche.

Capitel 11. Geometrische Bedeutung der conjugirten Punkte.

Die der Differentialgleichung genügende Curve kann in ein Flächenstück derart eingehüllt werden, dass zwei Normalen der Curve in benachbarten Punkten derselben sich nicht innerhalb desselben schneiden. pag.

pag. Jede solche Curve ist durch Anfangspunkt und Anfangsrichtung vollkommen eindeutig bestimmt. pag. .– Ist κ die trigonometrische Tangente des Winkels zwischen den Anfangsrichtungen zweier benachbarten Curven, so stellen sich die Coordinaten jeder benachbarten Curve in der Form dar: $\bar{x} = x + \kappa f_1(t, \kappa)$, $\bar{y} = y + \kappa f_2(t, \kappa)$ pag. .– Diese Darstellung ermöglicht eine eindeutige Beziehung zweier benachbarten Curven auf einander pag. .– Bedingung dafür, dass sich zwei unendlich nahe gelegene Curven schneiden pag. .– Der Punkt, in welchem dies geschieht, ist der zum Anfangspunkte conjugierte Punkt. pag. .– Der Punkt in welchem dies geschieht, ist der zum Anfangspunkte conjugirte Punkt pag. .– Derselbe kann nicht dem Anfangspunkte unendlich nahe liegen. pag. .–

Capitel 12. Letzte notwendige Bedingung für das Eintreten des Maximums oder Minimums und

pag.

Beweis, dass die nunmehr gegebenen auch hinreichend sind.
Diejenigen Punkte, welche man mit dem Anfangspunkte durch eine der Differentialgleichung genügende Curve verbinden kann, welche sämmtlich einer von diesen benachbart sind, bilden ein diese letztere vollständig einhüllendes Flächenstück pag. . – Definition einer Function E ($x\,y$, $p\,q$, $\bar{p}\,\bar{q}$) welche im Folgenden eine sehr wichtige Rolle spielt und die Entscheidung liefert, ob ein extremer Wert wirklich eintritt oder nicht pag. . – Damit ersteres stattfinde, muss E in jedem Punkte der Curve und in einem Punkte für alle Richtungen dasselbe Zeichen besitzen. pag. –
Ihre Beziehung zur Function F, pag. –
Das hier abgeleitete Criterium schliesst das frühere über die Function F mit ein pag. . – Die Punkte, für welche E einerlei Zeichen hat, bilden einen Bereich, der die Curve einhüllt pag. –
Die Variationen der Curve werden inner-

pag. halb dieses Bereiches angenommen. pag. .– Die Function $E(x\,y,\,p\,q,\,\bar{p}\,\bar{q})$ ist der Differentialquotient einer gewissen Integralsumme pag. .– Daraus folgt, dass wenn E längs der der Differentialgleichung genügenden Curve einerlei Vorzeichen hat, für dieselbe ein extremer Wert des Integrals eintritt pag. .– Die Function E verschwindet längs der von den zum Anfangspunkte conjugirten Punkten gebildeten Curve. pag. .– Sie verschwindet aber nicht in jedem Punkte einer beliebigen innerhalb des oben definirten Bereiches gelegenen Curve, pag. .– Die beliebige Curve braucht nicht, wie bisher vorausgesetzt, eine einzige reguläre Curve zu sein, sie kann auch aus beliebig vielen regulären Stücken bestehen. pag. – Ja, es bleiben alle Schlüsse bestehen, wenn nur der Ort der Punkte der beliebigen Curve gegeben werden kann, wofern nur das Integral in einem hier definirten erweiterten Sinne für dieselbe einen Wert besitzt. pag. .– Schlussbemerkungen

pag. über die drei ersten Probleme im vierten Capitel pag. . —

III. Hauptteil. Relative Maxima und Minima.

Capitel 13. Skizzirung der Aufgabe. Aufstellung der notwendigen Bedingungen.

Die im Vorhergehenden behandelte Aufgabe kann in mehrfacher Weise verallgemeinert werden, einmal für mehrere Veränderliche ohne oder mit gegebenen Bedingungsgleichungen (pag.) oder so, dass ein zweites Integral einen vorgeschriebenen Wert erhält pag. . — Letzterer Fall wird im Folgenden behandelt. Aufstellung der allgemeinen Aufgabe. pag. . — Beweis, dass es überhaupt solche Variationen giebt, für welche das zweite Integral seinen Wert beibehält. pag. —

Die Bedingung, dass in der vollständigen Variation des ersten Integrals die linearen Glieder verschwinden müssen, liefert zur Bestimmung der Curve die Differentialgleichung $G^0 - \lambda G' = 0$ pag. . — Beweis, dass

pag. die Constante λ für alle frei variirbaren Teile der Curve denselben Wert besitzt. pag. . – Definition einer frei variirbaren Stelle pag. . – Beweis, dass sich längs der frei variirbaren Teile der Curve die Grössen $\frac{d(F^0 - \lambda F')}{dx'}$ und $\frac{\partial(F^0 - \lambda F')}{\partial y'}$ überall stetig ändern. pag. . – Aus der Betrachtung der zweiten Variation folgt, dass F_1 beständig einerlei Zeichen besitzen muss und zwar das negative im Falle des Maximums, das positive im Falle des Minimums, pag. . —

Capitel 14. Das isoperimetrische Problem. Die Differentialgleichung zeigt, dass alle frei variirbaren Teile der ihr genügenden Curve Bögen gleicher Kreise sind, deren Mittelpunkte aber verschieden sein können pag. . – Grund, weshalb für einen vollständigen Kreis durch die Betrachtung der zweiten Variation der Existenzbeweis für die Maximaleigenschaft nicht geführt werden kann. pag. —

pag. Capitel 15. Aufgabe: Diejenige Curve von gegebener Länge und gegebenen Endpunkten zu finden, deren Schwerpunkt am tiefsten liegt. Als Lösung ergiebt sich die Kettenlinie pag. . – Beweis, dass es nur eine einzige Kettenlinie giebt, welche durch die gegebenen Endpunkte geht und die gegebene Länge besitzt. pag.

Capitel 16. Unfreie Variationen. (Die Steiner'schen Sätze.)

Die beiden Steiner'schen Sätze für das isoperimetrische Problem. pag. – Dieselben gelten, wenn die Curve die Grenze des Gebietes innerhalb dessen die Curve verlaufen soll, entweder nur in einem Punkte trifft, oder eine Strecke lang mit ihr zusammenfällt. Dieselben sind nur Specialfälle zweier für das allgemeine Problem geltender Sätze pag. . – Ableitung dieser allgemeineren Sätze pag. –

Über ein beim isoperimetrischen Pro-

blem auftretendes Paradoxon. Dasselbe löst sich dadurch, dass sich die Curve selbst Hindernisse bereitet und dadurch eine vollständig freie Variation unmöglich macht. pag. . – Ableitung der Differentialgleichung für zusammenfallende bez. mehrfach durchlaufene Teile der Curve pag. . – Verfahren, um zur Lösung zu gelangen, wenn die Curve gegebene Punkte, Strecken etc. der Reihe nach in sich aufnehmen soll. pag. . – Als Beispiel dient die Curve, welche bei gegebenem Flächeninhalt eine möglichst kleine Länge hat und durch drei gegebene Punkte hindurchgehen soll. pag. –

Capitel 17. Die hinreichenden Bedingungen.

Es wird zuerst die Bedingung abgeleitet, dass die Function $E^0 - \lambda E^1$ längs der Curve nicht Werte entgegengesetzten Zeichens haben darf, wenn ΔT^0 beständig einerlei Zeichens sein soll. pag. –

Den Punkten der Ebene werden Punkte im Raume in gewisser Weise zugeordnet pag. – Jeder Curve in der Ebene entspricht eine solche im Raume. Die ursprüngliche Curve in der Ebene wird in einen Flächenstreifen derart eingehüllt, dass für alle Punkte desselben E dasselbe Zeichen hat, die ihr entsprechende Curve im Raume durch einen Raumteil, welcher jenem Flächenstreifen entspricht, und die Eigenschaft besitzt, dass die in ihm enthaltenen, der Differentialgleichung genügenden Curven Variationen von einander sind und die zu diesen gehörigen λ nur wenig von einander abweichen pag. . – Die Function E ist der Differentialquotient einer gewissen Integralsumme pag. – Daraus folgt die Existenz der Maximal- bez. Minimaleigenschaft der Curve, außer in dem Falle, wo E längs einer Curve innerhalb jenes Raumteiles verschwindet, was jedoch, wie hier vorausgesetzt, und erst im nächsten Capitel bewiesen wird, unmöglich ist, pag. – Anwendung dieser Schlüsse auf ganz beliebige Curven unter Erweiterung des Integralbegriffs pag.

pag. Capitel 18. Begründung der beiden im vorigen Capitel gemachten Behauptungen.

1) dass ein Raumteil von der vorausgesetzten Beschaffenheit construirt werden kann;

2) dass die Function E nicht längs einer ganzen Curve innerhalb desselben verschwindet.

Beweis, dass jede der Differentialgleichung genügende Raumcurve durch Anfangspunkt, Anfangsrichtung und gegebenen Werth von λ vollkommen eindeutig bestimmt ist und dass man, wenn man die Anfangsrichtung und λ hinreichend wenig variirt, alle diejenigen Raumcurven erhält, die der ursprünglichen benachbart sind pag. — Die Punkte, welche man vom Anfangspunkte aus durch Curven eben erwähnter Art erreichen kann, bilden einen Raumteil von der vorausgesetzten Beschaffenheit pag. — Dazu wird bewiesen, dass eine gewisse Determinante $\Theta(t_0, t)$ beim Verschwinden ihr Zeichen wechselt, ausser in einem besonderen Falle, der jedoch nicht allgemein erledigt werden kann. pag. — Definition

pag. der zum Anfangspunkte conjugirten Raumpunkte. Dieselben sind die Schnittpunkte unendlich benachbarter, der Differentialgleichung genügender Curven und die zu ihnen gehörigen Werte von t werden gefunden durch Auflösung der Gleichung $\Theta(t_0; t) = 0$ pag. — Beweis des Satzes, dass eine Strecke der Curve, welche den zum Anfangspunkt conjugirten Punkt enthält, kein Maximum oder Minimum darbieten kann pag. — Beweis dafür, dass die Function E nicht längs einer ganzen Curve innerhalb des erwähnten Raumteils verschwinden kann. pag. — Existenzbeweis der Maximal- resp. Minimaleigenschaft für die in den Problemen des 14ten und 15den Capitels gefundenen Curven, pag. —

Weierstrass,
Variations-
rechnung.